

*Witold Kwaśnicki**

PROBLEMY ANALIZY WYMIAROWEJ W EKONOMII

Ekonomia głównego nurtu (a zwłaszcza ekonomia neoklasyczna) uznaje fizykę za swój metodologiczny wzorzec. Jeśli tak, to wykorzystując formalizm matematyczny do opisu zjawisk gospodarczych, ekonomiści głównego nurtu powinni też przestrzegać analizy wymiarowej (czyli dokonywać tzw. rachunku mian). W istocie każdy z nas (świadomie albo nieświadomie) stosuje, lub stosował, analizę wymiarową¹. Przypomnijmy sobie nasze zmagania z fizyką w szkole średniej czy na studiach. Kiedy zdarzało się nam zapomnieć jakiegoś wzoru fizycznego, ale ‘widzieliśmy jego kształt’ w zarysach (wiedzieliśmy np. jakiego rodzaju zmienne występują we wzorze), to do prawidłowej postaci tego wzoru dochodziliśmy niejako ‘od tyłu’, stosując rachunek mian, tak by wymiary po jednej i po drugiej stronie znaku równości nam się zgadzały. Dlaczego zatem ekonomiści tak bardzo stronią od analizy wymiarowej?

Problem braku analizy wymiarowej w analizie ekonomicznej przedstawił William Barnett II w swoim artykule z 2003 r., opublikowanym w „Quarterly Journal of Austrian Economics”. W roku 2006 wspólnie z Krzysztofem Kostro zaprosiliśmy polskich ekonomistów do zabrania głosu w tej sprawie, zadając im pytania: Czy zidentyfikowana przez Barnetta niekonsekwencja i niespójność w stosowaniu wymiarów przez ekonomistów naprawdę stanowi poważną barierę do naśladowania metod nauk ścisłych i stosowania w ekonomii matematyki? Czy deprecjonuje ona wcześniejsze osiągnięcia teoretyczne, czy też jest to może sprawa błaha, która nie podważa gmachu nauk ekonomicznych? Czy wymiary mają w ekonomii takie samo znaczenie jak w fizyce czy inżynierii? Czy w związku

* Instytut Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Wrocławski.

¹ „Analiza wymiarowa, *fiz.* metoda postępowania przy sprawdzaniu równań lub wyznaczaniu postaci wzorów wiążących różne wielkości *fiz.* na podstawie danych z doświadczeń lub w wyniku eksperymentów myślowych” (*Encyklopedia PWN*).

z tym bezwzględnie muszą być stosowane konsekwentnie i prawidłowo? Czy bagatelizowanie tego problemu nie jest przejawem przysłowiowego „chowania głowy w piasek”? Czy Barnett sam jest „genialnym idiotą” (takiego określenia używa w swoim artykule), który cierpi na dyskalkulię (co zarzuca swoim recenzentom), czy też jest pierwszym odważnym, który nie zawahał się powiedzieć: król jest nagi? Odpowiedzi udzieliło ośmiu ekonomistów, a ich wypowiedzi zostały opublikowane w „Studiach Ekonomicznych”².

W artykule (który jest pokłosiem spotkania w ramach Letniego Seminarium Ekonomicznego 2011)³ chciałbym wrócić do dyskusji zainicjowanej w 2006 r., dokonać krytycznej analizy tekstów opublikowanych w „Studiach Ekonomicznych” oraz skomentować je w kontekście oryginalnej publikacji Charlesa Wigginsa Cobba i Paula Howarda Douglasa z 1928 roku⁴.

Zainteresowanym zastosowaniu analizy wymiarowej polecić można książki polskich autorów: Wacława Kasprzaka i Bertolda Lysika (1978) oraz Wacława Kasprzaka, Bertolda Lysika, Marka Rybaczuka (1990), tam też można poznać podstawy teoretyczne analizy wymiarowej. Szukając literatury odnoszącej się do analizy wymiarowej, dowiedziałem się o książce Fritsa De Jonga (1967), *Dimensional Analysis for Economists*⁵. Jak widać, kwestie analizy wymiarowej w ekonomii były przedmiotem dyskusji na kilkadziesiąt lat przed tym, jak postawił ten problem William Barnett. Książka ta, dzięki szczęśliwemu zbiegowi okoliczności, przysłana ze Stanów Zjednoczonych, dotarła do mnie niedawno. Ogromną jej zaletą jest samo postawienie problemu analizy wymiarowej w ekonomii. Szkoda, że książka ta nie została zauważona przez ekonomistów i nie stała się zaczynem poważnej dyskusji. Niestety problem analizy wymiarowej w ekono-

² „Studia Ekonomiczne”, nr 3/2006:

- Wprowadzenie do dyskusji: Krzysztof KOSTRO, *Barnett, szkoła austriacka a wymiary w ekonomii*;
- Wiliam BARNETT II, *Wymiary a ekonomia; niektóre problemy*;
- Witold KWAŚNICKI, Marcin ZIELIŃSKI, *Uwagi do artykułu Barnetta „Wymiary a ekonomia”*;
- Tadeusz BEDNARSKI, *Głos polemiczny do artykułu Williama Barnetta*;
- Andrzej MALAWSKI, *Nieco hałasu o coś, czyli kilka uwag ad hoc o wymiarowości w ekonomii*;
- Tomasz ŻYLICZ, *Czy w ekonomii jednostki pomiaru coś znaczą?*;
- Emil PANEK, *Uwagi na marginesie artykułu W. Barnetta „Dimensions and economics: some problems”*;
- Zbigniew CZERWIŃSKI, *Kilka słów o sprawie wymiarów w ekonomii*;
- Zbigniew HOCKUBA, *Złożoność a ekonomia: wybrane problemy. Uwagi na marginesie artykułu Williama Barnetta II*.
- „Studia Ekonomiczne” 2007, nr 1–2:
- Krzysztof Maciej PRZYŁUSKI, *Wymiary a ekonomia: nie ma problemu*.

³ <http://mises.pl/projekty/letnie-seminarium-austriackie/letnie-seminarium-ekonomiczne-2011/>

⁴ Cobb C.W. and Douglas P.H. (1928), *A Theory of Production*, “American Economic Review” 18(1), 139–165. Supplement, Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association.

⁵ F.J. Jong (De), W. Quade, 1967, *Dimensional Analysis for Economists*, By Frits J. De Jong, With a Mathematical Appendix on the Algebraic Structure of Dimensional Analysis by Wilhelm Quade.

mii został potraktowany przez De Jonga bardzo formalnie i trochę ‘po inżyniersku’. W zasadzie nie niepokoją go problemy postawione przez Barnetta, np. niewymierne wartości wykładników w funkcji produkcji Cobba-Douglasa, prowadzące do dziwnych wymiarów niektórych parametrów tej funkcji (patrz np. s. 34–46). De Jong (1967, s. 47) zwraca jednak uwagę, że wykładniki w funkcji produkcji, które nie są liczbami całkowitymi, „nie spełniają wymogów teorii algebraicznej struktury analizy wymiarowej”.

Wiele wskazuje na to, że postrzeganie przez ekonomistów fizyki jako ‘twardej nauki’ jest nie do końca słuszne. Rozwój fizyki związany jest nie tylko z rozwojem analizy formalnej. Albert Einstein swoim gabinetem w Institute for Advanced Studies miał wywieszony motto: „Nie wszystko, co się liczy, może zostać policzone i nie wszystko co może zostać policzone, się liczy”. Natomiast Richard Feynman powiedział swego czasu, że „rozumienie sensu matematycznego równań nie oznacza rozumienia fizyki”. Czy tak lubiący formalne, matematyczne podejście ekonomiści głównego nurtu nie powinni wziąć sobie do serca przesłania Feynmana: „zanim zacznę szukać rozwiązania, najpierw muszę mniej więcej zrozumieć, jak ono wygląda. (...) muszę mieć jakościowe wyobrażenie zjawiska, żeby móc je opisać na poziomie ilościowym?” (Feynman, 2005).

Faktem jest, że fizycy w odróżnieniu od ekonomistów, po wielu dekadach dyskusji, doszli do konsensu, że wymiary wszystkich zmiennych przez nich używanych mogą być wyrażone jako pochodne siedmiu wielkości fizycznych: długość, masa, czas, natężenie prądu elektrycznego, temperatura, natężenie światła (światłość) i liczność materii (w tzw. międzynarodowym układzie miar SI (Système International d’Unités) odpowiadają im następujące jednostki fizyczne: metr, kilogram, sekunda, amper, kelwin, kandela i mol). Dwie jednostki pochodne, mianowicie radian i steradian (będące miarami kąta płaskiego i kąta bryłowego) nie mają wymiarów (są liczbami niemianowanymi – patrz Załącznik). Wymiary wszystkich innych wielkości (zmiennych) wynikają z odpowiednich równań, np. fizycy wyrażają moc w watach (W), którego wymiar wynikający z definicji mocy jest równy $[\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}]$, a przewodność elektryczną w simensach (S) o wymiarze $[\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{A}^2]$.

Każde poprawne równanie musi być wymiarowo spójne, tzn. wymiary lewej i prawej strony muszą być takie same, czyli

$$[\textit{lewa strona}] = [\textit{prawa strona}]$$

Przykładowo, modelowanie siły tarcia spowodowanej oporem powietrza prowadzi do zależności

$$F = kv^2; [F] = [kv^2].$$

Skąd $MLT^{-2} = [k][LT^{-1}]^2 = [k]L^2T^{-2}$,
czyli $[k] = ML^{-1}$,
tzn. k musi być mierzone w kg/m.

Przypuśćmy, że budujemy model, który będzie określał okres wahań t . Lista czynników wpływających na t może obejmować długość wahadła l , jego masę m , przyspieszenie ziemskie g i kąt maksymalnego wychylenia θ . Załóżmy, że

$$t = kl^a m^b g^c \theta^d$$

gdzie: a, b, c, d oraz k – liczby rzeczywiste.

Dla wymiarów musi zachodzić $[t] = [kl^a m^b g^c \theta^d]$.

Zatem $T = L^a M^b (LT^{-2})^c$ czyli $T = L^{a+c} M^b T^{-2c}$

k i θ są wielkościami bezwymiarowymi. Przyrównanie potęg przy odpowiednich zmiennych po lewej i prawej stronie równania daje:

$$a + c = 0, b = 0, -2c = 1,$$

skąd $t = kl^{1/2} g^{-1/2} \theta^d$.

W powyższym wzorze d może przyjąć dowolną wartość, zatem możemy zapisać, że:

$$t = f(\theta) \sqrt{\frac{1}{g}}.$$

Funkcję $f(\theta)$ należy znaleźć w inny sposób. Dla małych wahań (małego θ) okres nie zależy od amplitudy, nie zależy też od masy i jak wiemy z kursu fizyki, okres wahań może być wyrażony wzorem:

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g}}.$$

Dla sławnego równania grawitacji Isaaka Newtona opisującego siłę, z jaką przyciągają się dwie masy m_1 i m_2 , których środki ciężkości są odległe od siebie o r , mamy:

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Zgodnie z postulatami analizy wymiarowej wymiar stałej grawitacji k (której wartość określona została eksperymentalnie) jest równy:

$$k = 6,67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \right] = 6,67 \cdot 10^{-8} \left[\frac{cm^3}{g \cdot s^2} \right].$$

Podążając za podejściem neoklasycznym, należałoby podobną analizę dokonywać w badaniach ekonomicznych także w przypadku powszechnie używanej w ekonomii neoklasycznej funkcji produkcji⁶ określającej maksymalne rozmiary produkcji Q , jakie są możliwe do osiągnięcia przy różnym poziomie nakładów (czynników produkcji) x_1, x_2, \dots, x_n ,

$$Q = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

⁶ Zaproponowanej po raz pierwszy w 1894 roku przez Knuta Wicksella.

Jeśli takimi podstawowymi czynnikami są kapitał (K) i praca (L), to tzw. funkcja produkcji Cobba-Douglasa przyjmuje postać:

$$Q = AK^\alpha L^\beta.$$

gdzie A – stała określająca zdolności technologiczne systemu.

Barnett (2003, 2006) w swojej pracy proponuje dokonanie takiej analizy wymiarowej dla produkcji „pewnego specyficznego dobra, które nazwiemy *wihajstrami*”. Jak dalej pisze: „Jeżeli wymiary zostały zastosowane prawidłowo, to produkcja, kapitał i praca muszą mieć zarówno wielkość, jak i *wymiar* (-y), a α i β są samymi liczbami. Załóżmy, na przykład, że:

- (1) Q jest mierzone w *wihajstrach/czas* [whj/rok];
- (2) K jest mierzone w *maszynogodzinach/czas* [mg/rok];
- (3) L jest mierzone w *roboczogodzinach/czas* [rg/rok].

Zatem analiza wymiarowa funkcji produkcji $Q = AK^\alpha L^\beta$ pozwala ustalić, że A ($= Q/K^\alpha L^\beta$) jest mierzone w: [$wihajstry/czas$]/[($maszynogodziny/czas$) $^\alpha$ · ($roboczogodziny/czas$) $^\beta$]; tj. w: [$whj \cdot rok^{\alpha+\beta-1}$]/[$mg^\alpha \cdot rg^\beta$].

Barnett w swoim artykule stawia dwa podstawowe zarzuty w stosunku do neoklasycznej funkcji produkcji: że prawidłowe użycie wymiarów prowadzi do używania wymiarów nie mających uzasadnienia lub sensu ekonomicznego oraz że „te same stałe lub zmienne posiadają różne wymiary, czyli tak jakby prędkość mierzyć raz w metrach na sekundę, a kiedy indziej w samych metrach lub w metrach do kwadratu na sekundę”.

Jeśli chodzi o pierwszy zarzut, to faktycznie niekiedy wymiary niektórych zmiennych ekonomicznych mogą sprawiać dziwne wrażenie i trudno niekiedy znaleźć jakieś sensowne ich uzasadnienie. Możemy jednak powiedzieć, że takie ‘dziwne’ wymiary mogą mieć zmienne fizyczne (popatrzmy choćby na wymiary niektórych z nich przedstawionych w Załączniku). Duży niepokój natomiast musi budzić to, że przy dowolnych rzeczywistych wartościach α i β w wymiarach mogą występować potęgi niewymierne (i pod tym względem należy zgodzić się z Barnettem). Jeśli w fizyce występują wymiary z ‘dziwnymi’ potęgami to zwykle są to liczby wymierne, a najczęściej liczby całkowite.

Drugi zarzut Barnetta o niestałości wymiarów jest, według mnie, znacznie poważniejszy. Jeśli porównamy np. wymiary stałych proporcjonalności w prawie grawitacji (k) oraz w funkcji Cobba-Douglasa (A), to zgodzić się trzeba z Barnettem, że dla stałej grawitacji k wynik jest niezmienny dla niezliczonych pomiarów od przeszło trzech wieków: „niezależnie od wartości, wymiary zawsze miały postać odległość³/(masa · czas²); tj. w układzie *mks* [$m^3/(kg \cdot s^2)$]”. Natomiast w analizie ekonomicznej jest odmiennie. Wartości α i β zmieniają się nie tylko w przypadku zastosowania jej do różnych produktów czy różnych krajów, ale różnią się także w zależności od tego, jaki okres do ich określania jest wybierany.

Jeśli zatem w ekonomii neoklasycznej prawidłowo użyjemy analizy wymiarowej, to uzyskamy niestałe wymiary. Jak pisze Barnett, problem ten „staje się jednak oczywisty tylko wtedy, gdy wymiary są poprawnie zawarte w modelu, co jest rzadkim przypadkiem w modelowaniu ekonomicznym”.

Przykładowo (przy standardowym neoklasycznym założeniu substytucyjności kapitału i pracy, czyli założeniu, że $\alpha + \beta = 1$, szacunkowe wartości α podawane przez Coe, Helpmana (1995) dla krajów OECD (na podstawie danych z lat 1987–1989) to 0,335, dla Niemiec 0,401 i Szwajcarii 0,211. Natomiast dla Polski szacunki L. Zienkowskiego (dla okresu 1992–2000) wskazują, że $\alpha = 0,47$ – $0,5$, natomiast R. Rapacki podaje, że (dla lat 1990–2000) $\alpha = 0,35$, a W. Welfe uważa, że $\alpha = 0,48$ ⁷.

Zdaniem Barnetta stanowi to poważny problem, gdyż „ A posiada zarówno wartość, jak i wymiary, to różne wartości α i β oznaczają różne wymiary A i mimo że wymiary, w jakich dokonuje się pomiaru Q , K i L są stałe, to wymiary A są zmienne”.

Trafna jest też uwaga Barnetta, że „[p]rzyszłe pokolenia ekonomistów są kształcone w błędnej tradycji, ponieważ ich młode umysły są kształtowane przez właśnie takie publikacje. I dopóki się to nie zmieni, a ekonomiści nie zaczną używać wymiarów w sposób konsekwentny i prawidłowy (o ile to w ogóle możliwe), to ekonomia matematyczna i jej empiryczne *alter ego* – ekonometria – nadal pozostaną akademickimi gierkami i »rygorystycznymi« pseudonaukami. Z powodu wpływu, jakie ekonomiści wywierają na politykę rządu, takie pseudonaukowe gierki nie odbywają się jednak bez kosztów, które ponosi się w realnym świecie”.

Barnett wysłał ten artykuł do jednego z najznakomitszych czasopism głównego nurtu, „The American Economic Review”, gdzie często są publikowane prace, w których punktem wyjścia jest funkcja Cobba-Douglasa. Warto przeczytać zamieszczoną przez Barnetta korespondencję z wydawcą i recenzentami (patrz załącznik do artykułu Barnetta zamieszczonego w „Studiach Ekonomicznych”). Tutaj przypomnimy tylko trzy fragmenty. Jeden z recenzentów twierdzi, że „[a]naliza wymiarowa ma zastosowanie tylko w przypadku *praw*”, zatem nieuzasadnione jest krytykowanie funkcji produkcji z punktu widzenia analizy wymiarowej. W innym miejscu recenzent twierdzi, że podobny brak dbałości o konsekwentne stosowanie wymiarów obecne jest także w fizyce. Podaje przykład: „(...) rozwiązanie problemu [ruchu harmonicznego prostego] stanowi (...), że $x = 1/3\cos(8t)$, gdzie x jest długością łuku (...) mierzoną w metrach, a t jest czasem mierzonym w sekundach. Więc dokładnie jakiego rodzaju stałej przeliczeniowej chce pan użyć, żeby zamienić czas na długość? Z pewnością nie jest to stała, gdyż musi przejść przez wyrażenie cosinusowe (podobnie jednostki pracy i kapitału muszą przejść przez wykładniki potęgi w przykładzie [$Q = AK^\alpha L^\beta$] powyżej)”. Aż dziw bierze, że można coś takiego napisać. Przypomnienie sobie tego, czego uczyliśmy się na lekcjach fizyki w szkole średniej, od razu pokazuje,

⁷ Co ciekawsze, w większości prac ekonomistów neoklasycznych przyjmuje się (nie wiedzieć dlaczego), że $\alpha = 0,3$ (ta wartość też jest często podawana w podręcznikach do makroekonomii).

gdzie tkwi błąd takiego ‘rozumowania’. Ogólny wzór na ruch harmoniczny to $x = A\cos(\omega t)$; w podanym przykładzie amplituda A równa się $1/3$, a częstotliwość ω jest równa 8; częstotliwość ma wymiar odwrotności czasu, zatem ωt jest wartością bezwymiarową. Więc gdzie tu błąd?

Drugi przykład podawany przez recenzenta z „American Economic Review”, świadczący, jego zdaniem, też o tym, że fizycy nie dbają o wymiary, jest zaczerpnięty z zadania w jednym ze znanych podręczników fizyki, mianowicie „...przykład dotyczący przewodności cieplnej w rurach. Rozwiązaniem jest $U = 699 - 216 \ln(r)$, gdzie r to odległość w centymetrach, a U to temperatura w stopniach. Jakiego współczynnika konwersji chce pan teraz użyć, żeby przekształcić odległość na stopnie? Wnioskuje, że fizyka zawiera takie same »defekty«, gdy badamy pewne układy”.

I znów świadczy to tylko o indolencji recenzenta. Prosty zapis rozwiązania tego zadania przedstawiono w ‘postaci ogólnej’ (a nie konkretnych liczb) jako:

$$-600\pi^2 U = q \ln r + c;$$

$$-600\pi U = q(\ln r + \ln r_0) = q \ln\left(\frac{r}{r_0}\right);$$

pokazuje, że uwzględnienie w ogólnym rozwiązaniu promienia odniesienia r_0 powoduje, że wyrażenie pod logarytmem jest bezwymiarowe (jest liczbą rzeczywistą), czyli zgodnie z analizą wymiarową.

KRÓTKA KRYTYCZNA ANALIZA UWAG ZAWARTYCH W ARTYKUŁACH POLSKICH EKONOMISTÓW

Polscy ekonomiści, którzy wzięli udział w dyskusji nad artykułem Barnetta, zgadzają się z opinią, że analiza wymiarowa jest ważnym metodologicznym elementem badań naukowych i że powinno się ją stosować w analizie ekonomicznej. W większości artykułów są jednak zawarte zastrzeżenia do wniosków Barnetta lub próba pokazania, że w istocie to, co przedstawił Barnett, nie jest żadnym problemem. Przyjrzyjmy się tym argumentom.

TADEUSZ BEDNARSKI, *GŁOS POLEMICZNY* DO ARTYKUŁU WILLIAMA BARNETTA

Trzeba się zgodzić z opinią Tadeusza Bednarskiego, że „w ekonomii *brak jest podstawowych i niezależnych zmiennych*, które pozwalałyby dostatecznie dokładnie wyrazić wartości innych interesujących zmiennych ekonomicznych”. Otwarte pozostaje pytanie, czy istnieje w ogóle możliwość zdefiniowania w ekonomii bazowych zmiennych (wymiarów), podobnie jak uczynili to fizycy proponując np. układ SI?

Dosyć kontrowersyjna, ale bardzo twórcza, wydaje się opinia T. Bednarskiego odnośnie do relacji badacza i rzeczywistości: „Fizyk poznaje rzeczywistość taką,

jaka ona jest – niezależnie od naszego istnienia. Inaczej jest w sferze poznania ekonomicznego, gdzie obserwuje się sprzężenie zwrotne pomiędzy poziomem wiedzy i »stanem ekonomii«. Dla przykładu, określenie czynników warunkujących stabilny rozwój gospodarczy wpływa na uwarunkowania prawno-instytucjonalne, które z kolei modyfikują procesy rozwojowe. Tak więc wiedza ekonomiczna, do pewnego stopnia modyfikuje »naturalne prawa« samej ekonomii, prawa wynikające z ludzkich zachowań. Trudno byłoby uwierzyć, żeby poziom wiedzy w naukach fizycznych miał wpływ na kształt obiektywnych praw fizyki”. Z jednej strony jest faktem, że ekonomia tym różni się od fizyki (i innych nauk przyrodniczych), że obiektem jej analizy jest działający człowiek, świadomy swoich celów i mający wolną wolę. Dyskutowałbym jednak z tezą, że, w odróżnieniu od fizyki, w ekonomii poziom wiedzy ma wpływ na kształt obiektywnych praw ekonomii. Jak pokazuje Mises (choćby w swoim *magnum opus: Ludzkie działanie* (Mises, 2007)), w ekonomii istnieją, tak samo jak w fizyce, obiektywne prawa, niezmiennie w czasie i przestrzeni, i niezależne od ludzkiej aktywności (choć nie są to prawa formułowane w języku matematyki).

Odnosnie do naszego głównego problemu analizy wymiarowej Tadeusz Bednarski przyznaje, że „dla przejrzystości wniosków istotne jest każdorazowe ustalenie i opis jednostek dla poszczególnych zmiennych”. Jednakże, po pokazaniu przykładu (o którym poniżej) stwierdza, że „w istocie rzeczy *postać* funkcji wiążącej produkcję, kapitał i pracę nie zależy od przyjętych jednostek, jeśli tylko zachowana będzie zasada proporcjonalności przy wymianie zmiennych”. Z tym wnioskiem nie mogę się zgodzić. T. Bednarski przedstawia następujące rozumowanie:

Niech więc wielkość produkcji Y opisuje funkcja $F(K, L)$, zależna od kapitału K i pracy L . Przyjmijmy, że kapitał $K^*(r, w, p)$ i praca $L^*(r, w, p)$ są funkcjami poziomu cen p , stawki płac w i stopy zwrotu z kapitału (*capital rental rate*) r . By maksymalizować zysk określany równaniem $pF(K, L) - rK - wL$, trzeba policzyć pochodne cząstkowe zysku względem kapitału i pracy, i przyrównać je do zera, mamy stąd:

$$pF_K(K^*, L^*) = r, pF_L(K^*, L^*) = w.$$

„Warunek stałego udziału płac w przychodzie, który tutaj przyjmujemy, równy α , można zapisać następująco: $wL^* = \alpha pF(K^*, L^*)$. Podobnie dla kapitału: $rK^* = (1 - \alpha)pF(K^*, L^*)$.

Dzieląc każde z równań pierwszej pary przez odpowiednie równie drugiej pary otrzymujemy elementarny układ równań różniczkowych, niezależnych od wyjściowych zmiennych r, w, p

$$\frac{1 - \alpha}{K} = \frac{\delta \ln F}{\delta K},$$

$$\frac{\alpha}{L} = \frac{\delta \ln F}{\delta L}.$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest funkcja:

$$F(K, L) = AK^{1-\alpha}L^\alpha.$$

Trudno mi zgodzić się z wnioskiem wynikającym, zdaniem T. Bednarskiego, z powyższego rozumowania, że „trudno w powyższym rozumowaniu, wolnym w zasadzie od wymiarowości, dopatrzeć się logicznej luki. W istocie rzeczy *postać* funkcji wiążącej produkcję, kapitał i pracę nie zależy od przyjętych jednostek, jeśli tylko zachowana będzie zasada proporcjonalności przy wymianie zmienionych. Dla przykładu: wartość produkcji w danym okresie, wielkość produkcji w tonach lub sztukach (itp.) w tym samym okresie to zmienne proporcjonalne, ich zmiana wpłynie jedynie na wartość współczynnika A , a nie na *postać* funkcji produkcji”.

Wymiarowość w powyższym równaniu, według mnie, jednak istnieje, choć nie jest *explicite* wymieniona, mianowicie w co najmniej trzech równaniach: zysku $pF(K, L) - rK - wL$, oraz w obu warunkach: $wL^* = apF(K^*, L^*)$ i $rK^* = (1 - a)pF(K^*, L^*)$. We wszystkich tych równaniach wymiar musi być zachowany poprzez odpowiedni wymiar funkcji $F(K, L)$. Nieprawdą jest, że zmiana wymiarów (np. z ton na sztuki) „wpłynie jedynie na wartość współczynnika A , a nie na *postać* funkcji produkcji”. Według mnie zmieniają się zarówno wartości, jak i wymiary współczynnika A .

ANDRZEJ MALAWSKI, *NIECO HAŁASU O COŚ, CZYLI KILKA UWAG AD HOC O WYMIAROWOŚCI W EKONOMII*

Andrzej Malawski już na początku swoich uwag dezawuuje pracę Barnetta, pisząc, że „problem wymiarowości w ekonomii nie stanowi jakiegoś *novum*”, i wskazując liczne przykłady polskich autorów, gdzie problem ten, zdaniem A. Malawskiego, był i jest postrzegany. Nie wyjaśnia jednak, na ile tok rozumowania Barnetta jest podobny (lub inny) od podanych przez niego autorów. W dalszej części autor ustawia sobie problem tak, aby było mu wygodnie dojść do konkluzji końcowej. Pisze: „Pogląd Barnetta – (...), że brak wymiarów wielkości ekonomicznych i ich jednostek matematyczno-statystycznej analizy zjawisk procesów gospodarczych, zaś w przypadku ich uwzględnienia wskazywana niespójność bądź zmienność stanowi jej poważne nadużycie, czy wręcz dyskwalifikuje jako narzędzie badawcze na gruncie ekonomii – uważamy za skrajny i nieuzasadniony. Należy tu bowiem odróżnić co najmniej dwie kwestie: znaczenie badanego problemu w ekonomii teoretycznej i empirycznej oraz źródła ich matematyzacji. W pierwszej z nich znaczenie omawianego problemu trudno przecenić w badaniach empirycznych, domagających się pomiaru obserwowanych wielkości, co bez ustalonej jednostki (miana, wymiaru) jest wykluczone. Nie wydaje się natomiast tak konieczne w analizie teoretycznej, gdzie modele matematyczne tworzące teorie ekonomiczne nie muszą przyjmować formy równań czy ich układów, ale są w postaci aksjomatycznych systemów dedukcyjnych, jak m.in. teoria równowagi ogólnej, która nie pretenduje wprost do weryfikacji empirycznej, a jedynie poprzez swoje dalekosiężne implikacje logiczne (...). Krytyka owa nie uwzględnia bowiem nie tylko rozwarstwienia badań ekonomicznych na czysto teoretyczne i empiryczne, ale też zróżnicowania teoriopoznawczych interpretacji teorii eko-

onomicznych – co rzutuje na ostrość czy też znaczenie diskutowanego tu problemu wymiarowości i ich relatywizację z uwagi na przyjętą perspektywę badawczą i filozoficzną”.

W ten sposób Andrzej Malawski dochodzi do konkluzji, że „praca Barnetta nie stanowi jednak *wiele hałasu o nic* i zasługuje na uwagę, stąd tytułowe *niewiele hałasu o coś*. Szkoda jednak, że brak w niej części pozytywnej, co czyni ją mało konstruktywną”.

Całość tego tekstu można by zakończyć tak, jak kończą swój wywód matematycy: c.b.d.o. Mam jednak wątpliwości, że tego typu uwagi cokolwiek wyjaśniają. Naprawdę nie wystarczy *ex cathedra* stwierdzić, że krytyka „nie uwzględnia (...) nie tylko rozwarstwienia badań ekonomicznych na czysto teoretyczne i empiryczne, ale też zróżnicowania teoriopoznawczych interpretacji teorii ekonomicznych” i zamknąć sprawę.

TOMASZ ŻYLICZ, CZY W EKONOMII JEDNOSTKI POMIARU COŚ ZNACZĄ?

Tomasz Żylicz zaczyna swój artykuł dosyć optymistycznie, pisząc, że: „Różnica między równaniami ekonomicznymi i fizycznymi polega na tym, że te ostatnie bywają rzetelniej podbudowane empirycznie, a więc rzadziej się zdarza, iż wyrażający je wzór matematyczny jest błędny. Analiza wymiarowa pomaga znaleźć te błędy, ale nie gwarantuje ich eliminacji. Artykuł Williama Barnetta „... rzeczywiście zwraca uwagę na pewne niefrasobliwości ekonomistów, choć jego autor przesadza, twierdząc, że dorobek teorii ekonomii wymaga gruntownego przeglądu pod tym kątem”. Z punktu widzenia Barnetta dalszy wywód T. Żylicza można przyjąć pozytywnie. Píše on bowiem: „W fizyce takie przeliczenia [mian – W.K.] są na porządku dziennym, więc trudno sobie wyobrazić, że ktoś mógłby posługiwać się wzorem, którego i lewa, i prawa strona wyrażone są w innych jednostkach. Inaczej jest w ekonomii. Tutaj pomiar eksperymentalny bywa często problematyczny, więc i posługiwanie się wzorami zostaje zrytualizowane tak, że użytkownik często dobrze nie rozumie, jak interpretować obliczenia”. Dalej autor píše, że we wzorze $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, jeśli Y wyrazić w sztukach, K w złotychkach i L w dniówkach to A powinno mieć wymiar [sztuk zł – α dniówka – β] i stwierdza, że: „Z pewnością wielu ekonomistów nie zastanawiało się nad wymiarem parametru A , zadowolając się jedynie spostrzeżeniem, że jego zmienność wyraża działanie postępu technicznego. Jeszcze mniej badaczy było zapewne zaniepokojonych faktem, że wymiar ten nie jest możliwy do apriorycznego określenia, ponieważ parametry α i β bywają wynikiem oszacowania na podstawie danych empirycznych. (...) Autor [tj. Barnett – W.K.] sugeruje, że w fizyce to się nie może zdarzyć”. Tu kończy się w miarę pozytywny stosunek Tomasza Żylicza do artykułu Barnetta. Drugą część swojego artykułu T. Żylicz zaczyna od oznajmienia: „Otóż może się zdarzyć!” i podaje przykłady. Jeden z nich, zaczerpnięty z popularnego podręcznika do nauki fizyki, dotyczący przemiany adiabatycznej

gazów, kiedy to zmienia się objętość i temperatura gazu (przy ściskaniu) przy braku wymiany ciepła z otoczeniem. Wtedy:

$$pV^\kappa = \text{const},$$

gdzie p i V to odpowiednio ciśnienie i objętość gazu, a κ to parametr, którego wartość nie jest z góry określona (może mieć różne wartości (także niecałkowite i nawet niewymierne) wynikające z teoretycznych modeli budowy cząsteczkowej gazów i weryfikowane empirycznie). Jak mogę mniemać, z pewnym zadowoleniem T. Żylicz stwierdza, że „stała występująca po prawej stronie nie ma żadnego ustalonego *a priori* wymiaru. Tak więc krytyka funkcji Cobba-Douglasa stosuje się również i do modelu fizycznego adiabatycznej przemiany gazów, czego Barnett zdaje się nie dostrzegać”.

To jednak nie jest takie proste. Pozwolę sobie zatem na komentarz.

Własność $pV^\kappa = \text{const}$ łatwo wyprowadzić z równania Mendelejewa-Clapeyrona:

$$pv = \frac{R}{\mu}T, \quad pv = RT,$$

gdzie:

- p – ciśnienie,
- v – objętość właściwa gazu,
- R – uniwersalna stała gazowa,
- m – masa cząsteczkowa,
- T – temperatura,
- V – objętość kilomola gazu.

Nie trzeba wspominać, że w równaniu Mendelejewa-Clapeyrona wszystkie jednostki (wymiały) się zgadzają. Jak najczęściej wykorzystujemy własności typu $pV^\kappa = \text{const}$? Kiedy badamy dwa stany gazu jeden przy objętości V_1 i drugi przy objętości V_2 , znając ciśnienie p_1 w pierwszym stanie, pytamy się, jakie będzie ciśnienie w drugim stanie. Zatem mamy: $p_1(V_1)^\kappa = p_2(V_2)^\kappa$. Stąd wyliczamy $p_2 = p_1(V_1/V_2)^\kappa$. Wyrażenie V_1/V_2 jest liczbą rzeczywistą (bezwymiarową), κ może być zatem dowolną liczbą i wbrew temu co twierdzi T. Żylicz, nie ma żadnej sprzeczności i tym bardziej podobieństwa z funkcją Cobba-Douglasa.

Jako drugi przykład podobnej ‘niefrasobliwości’ w stosowaniu wymiarów przez matematyków i fizyków (co miałyby ich upodabniać do ekonomistów) T. Żylicz podaje znany wzór na przybliżenie wartości funkcji. Píše on: „W wielu zastosowaniach korzystamy np. ze wzoru Maclaurina przybliżającego wartość funkcji za pomocą pochodnych tejże funkcji obliczonych w punkcie 0:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f'''(0)x^3}{6} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}.$$

Aby ten wzór miał sens, należy rozumieć, że przy wszystkich składnikach sumy po prawej stronie stoją stałe 1 o odpowiednim wymiarze (tj. takim, żeby po pomnożeniu przez x w odpowiedniej potęgde otrzymać wymiar identyczny jak dla

lewej strony). Jest to zasada oczywista, której nie uwzględnia się zazwyczaj przy zastosowaniu wzoru Maclaurina”.

Otóż moim zdaniem i tutaj Tomasz Żylicz się myli, bo $f^{(n)}(0)$ ma ten właśnie postulowany wymiar; np. $f'(0)x = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{(x=0)} \cdot x$, dx ma ten sam wymiar co x , zatem całość tego wyrażenia ma wymiar $f(x)$. Podobnie jest z wyższymi pochodnymi $f(x)$.

Zatem, moim zdaniem, całkowicie nieuzasadniony jest ostateczny wniosek T. Żylicza, że „[n]ie można jednak zgodzić się z tezą autora [Barnetta – W.K.], iż dostrzeżony przez niego problem każe odrzucić znaczną część dorobku ekonomii, włącznie z funkcją produkcji Cobba-Douglasa. Taka reakcja jest mocno przesadzona, zaś argumenty stosowane przeciwko funkcji Cobba-Douglasa mogłyby być wysunięte przeciw wielu równaniom stosowanym w naukach przyrodniczych”. Pozytywne jest jednak to, że podsumowując Tomasz Żylicz stwierdza, iż „artykuł [Barnetta – W.K.] zwraca uwagę na pewien aspekt modelowania matematycznego, który jest często ignorowany w badaniach ekonomicznych. W tym sensie jest to artykuł, z którym ekonomista powinien się zapoznać”.

EMIL PANEK, UWAGI NA MARGINESIE ARTYKUŁU W. BARNETTA “DIMENSIONS AND ECONOMICS: SOME PROBLEMS”

W artykule tym autor przyjmuje podobną strategię, najpierw pochwalić Barnetta, a potem pokazać, że w istocie nie ma racji. Emil Panek pisze na początku, że „problem wymiarów w tzw. ekonomii ilościowej jest oczywiście ważny, jak zresztą problem wymiarów w każdej nauce, w której posługujemy się mianami. Ekonomia nie różni się pod tym względem od fizyki, chemii i astronomii. (...) W ekonomii, i w ogóle w naukach społecznych, liczba czynników wpływających na przebieg procesów jest tak duża, że **parametrów** ekonomicznych w ścisłym tego słowa znaczeniu (niezmiennych w czasie i przestrzeni) po prostu nie ma. (...) Model matematyczny w ekonomii różni się tym od modelu matematycznego w fizyce, że fizyka (klasyczna) ma do czynienia z relatywnie prostymi obiektami i prawami, czego nie można powiedzieć o ekonomii. (...) Weryfikacja założeń w ekonomii jest trudna lub niekiedy niemożliwa. Zmienność, złożoność procesów ekonomicznych sprawia, że »ponadczasowe«, »ponadprzestrzenne« prawa ekonomiczne nie istnieją – w odróżnieniu od »odwiecznych« praw fizyki czy astronomii”.

Już jednak po napisaniu, iż „ma rację prof. Barnett, że warunkiem koniecznym poprawności (formalnej) teorii czy modelu matematycznego w fizyce, ekonomii, czy każdej innej dziedzinie nauki jest zgodność wymiarów”, Emil Panek pisze: „Nie zgadzam się natomiast ze stwierdzeniem, że wymiary w ekonomii nie mają uzasadnienia i sensu (ekonomicznego), podczas gdy w fizyce mają. Wymiary w fizyce są często równie »dziwaczne« i skomplikowane, jak w ekonomii (zwłaszcza w fizyce współczesnej). Równie nietrafny jest zarzut niestałości wymiarów”.

E. Panek proponuje rozważenie funkcji produkcji Cobba-Douglasa w postaci intensywnej $y(t) = \alpha k^{\alpha(t)}(t)$. Według niego „wymiar współczynnika α zmienia się w zależności od α nie dlatego, że funkcja opisuje proces ekonomiczny (a nie

fizyczny), ale z tego powodu, że opisywana zależność ma charakter nieliniowy. To, że chodzi tu o zależności ekonomiczne, a nie fizyczne, nie ma żadnego znaczenia. Nieliniowe procesy fizyczne generują zmienne wymiary tak samo jak nieliniowe procesy w ekonomii.

W naszym przykładzie:

$$\alpha(t) = \frac{Y(t)[zł/T]}{K(t)[zł]^{\alpha(t)}} = \frac{Y(t)}{K^{\alpha(t)}(t)} [T^{-1}(zł)^{1-\alpha(t)}]$$

i, jak widać, wymiar α zmienia się w czasie wraz ze zmianą wartości (bezwymiarowego z założenia) współczynnika elastyczności produkcji względem kapitału α ".

Tutaj pozwolę sobie nie zgodzić się ze stwierdzeniem, że „nieliniowe procesy fizyczne generują zmienne wymiary tak samo jak nieliniowe procesy w ekonomii”. Trudno mi znaleźć takie przypadki w fizyce, szkoda zatem, że Emil Panek nie podał konkretnych przykładów takich nieliniowych procesów fizycznych.

Dlatego też niezbyt zrozumiały jest dla mnie postulat i stwierdzenie E. Panka, że „spełnione musi być bezwzględnie Kornayowskie kryterium prawdy logicznej. Dotyczy to w szczególności zgodności wymiarów. Ale tylko tyle! »Nistałość wymiarów«, »brak uzasadnienia dla wymiarów« to nie są poważne zarzuty naukowe. (...) Reasumując, wymiary muszą być zgodne. A czy są proste, czy złożone, czy stałe, czy niestałe, to nie ma większego znaczenia ani w ekonomii, ani w żadnej innej nauce. W ekonomii punktem wyjścia przy konstruowaniu wymiarów są zasoby i strumienie. Wszystkie inne wymiary są ich pochodnymi”.

ZBIGNIEW CZERWIŃSKI, KILKA SŁÓW W SPRAWIE WYMIARÓW W EKONOMII

I znów na początku pochwały i wyznanie Zbigniewa Czerwińskiego: „Zgadzam się z W. Barnettem, że wymiary wielkości występujących w modelach ekonomicznych (ekonometrycznych) powinny być starannie definiowane. (...) Czytelnik powinien wiedzieć, czy chodzi np. o złote, czy o złote na czas, czy o liczbę robotników lub liczbę roboczogodzin itp. Wymiar parametrów jest zdeterminowany przez wymiar zmiennych i gdy wymiar zmiennych nie budzi wątpliwości, nie powinien ich też budzić wymiar parametrów. (...) Ważne jest natomiast, aby – gdy zapisuje się równania (czysto teoretyczne lub szacowane empirycznie) – wymiary prawej i lewej strony były jednakowe. W pracach ekonomistów (ekonometryków) można znaleźć przykłady łamania tej zasady. Z tego powodu domaganie się jej przestrzegania jest słuszne”.

Potem jednak Autor bagatelizuje problem, pisząc: „Barnetta gnębi problem niestałych wymiarów w ekonomii (ekonometrii) w przeciwieństwie do ich stałości w fizyce. Tak rzeczywiście jest, ale to zmartwienie tylko tych, którzy oczekują, że nauki społeczne mogą (powinny) dokładnie naśladować nauki przyrodnicze. Nie jest to jednak możliwe. Nauki przyrodnicze, w szczególności fizyka, są w stanie formułować **prawa uniwersalne**, sprawdzające się (przy stałych parametrach) niezależnie od miejsca i czasu. Zjawiska społeczne takim prawom nie podlegają –

chyba, że za prawa uznamy też pewne niewiele znaczące ogólniki w rodzaju »gdy cena rośnie, to popyt spada«, co sprawdza się lub nie w zależności od okoliczności towarzyszących wzrostowi cen (*ceteris paribus*). (...) Parametry elastyczności i TFP to charakterystyki procesu produkcji, które **są różne w różnych krajach i w różnych epokach**. Dlaczego miałyby być inaczej?”

Z. Czerwiński dosyć nonszalancko rozprawia się z problemem, pisząc: „Wymiary parametrów funkcji produkcji nie mogą być stałe. Powód, dlaczego tak jest, to kwestia filozoficzna, której nie będę rozważał”. Czy uznanie, że jakiś problem jest kwestią filozoficzną jest dostatecznym uzasadnieniem unikania poszukiwania odpowiedzi? Chyba nie.

Moim zdaniem, całkowicie nie do przyjęcia jest argument Autora, że „gdyby w Europie grawitacja była odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości (...), a w Ameryce była odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości, to »amerykański« wymiar stałej grawitacji byłby odmienny od »europejskiego«. (...) W sferze fizyki ta rozbieżność jest niemożliwa, ale w ekonomii wydaje się być całkiem naturalna. Zamiast **uniwersalnych praw** mamy tylko **lokalne, statystyczne prawidłowości**, sprawdzające się »na ogół« i tylko z pewnym przybliżeniem”.

Czym zatem jest nauka? Jeśli w ten sposób traktowalibyśmy analizę ekonomiczną, to czy uzasadnione byłoby uznawanie ekonomii za naukę?

K. MACIEJ PRZYŁUSKI, *WYMIARY A EKONOMIA: NIE MA PROBLEMU*

Maciej Przyłuski na początku chwali Barnetta, pisząc, że „autor pracy postuluje, że konieczne jest konsekwentne i prawidłowe posługiwanie się wymiarami. Trudno się z tym nie zgodzić”. Zaraz po tym dodaje jednak, że „swoje stwierdzenia autor wspiera dwoma przykładami, które – moim zdaniem – nie pozwalają na sformułowanie żadnych inkwizytorskich osądów”.

Dalej jest w podobnym stylu. K.M. Przyłuski pisze, że przedstawione przez Barnetta „zarzuty wskazują raczej na podstawowe niezrozumienie przez niego arytmetyki liczb kardynalnych: dla Barnetta z równości $\infty + \infty = \infty$ wynika (po skróceniu w obu stronach tej równości ∞), że $\infty = 0$; właśnie argumenty na tym poziomie się pojawiają”.

Dla Macieja Przyłuskiego problem postawiony przez Barnetta nie jest jakimkolwiek problemem. Podążając za swoim poglądem, że „[u]kład jednostek to przyjęty (dość arbitralnie) zbiór wielkości podstawowych oraz pochodnych wraz z jednostkami miar wielkości pochodnych”, K.M. Przyłuski zadaje pytanie i udziela natychmiast odpowiedzi: „... **jak są mierzone odpowiadające im wielkości** występujące w naszych rozważaniach dotyczących funkcji produkcji. Odpowiedź jest prosta: **te wielkości reprezentują czas; wszystkie z nich mierzyć można za pomocą tego samego zegara!** Nie używamy specjalnego zegara do pomiaru upływającego czasu produkcji, czasu pracy maszyn i czasu pracy ludzi. Rok to zwykle 8760 godzin, jedna maszynogodzina trwa godzinę, a jedna roboczogodzina, nawet jak nam się dłuży, też trwa godzinę. (...) *K jest mierzone w maszynogodzinach/czas*, tak więc jednak **K jest wielkością bezwymiarową**, po

prostu, bo jej prawdziwy wymiar to czas/czas. Podobnie L jest mierzone w *roboczogodzinach/czas*, więc także L jest wielkością bezwymiarową. Oczywiście, niepokojące Barnetta wielkości K^α oraz L^β są także bezwymiarowe. Rozważmy teraz wymiar współczynnika A . Jest to zgodne z tym, co zauważa Barnett [*wihajstry/czas*]/[*maszynogodziny/czas*] $^\alpha$ · [*roboczogodziny/czas*] $^\beta$. (...) wymiar współczynnika A jest taki sam, jak strumienia Q , co chcieliśmy uzasadnić”.

Można i tak. Przyjąć ‘dość arbitralnie’ jednostki podstawowe i problem znika. Co jednak, jeśli ‘dość arbitralnie’ przyjmiemy (jak to często jest w statystykach), że kapitał mierzymy w jednostkach monetarnych, a czas w roboczogodzinach?

Zresztą to nie jest jedyna wypowiedź K.M. Przyłuskiego w tym krótkim artykule, w którym niczym Aleksander Macedoński rozwiązuje gordyjski węzeł. Na zakończenie tego artykułu obwieszcza, że „ekonomistom się wydaje, że rozpatrują bardziej skomplikowane procesy niż te, z którymi mamy do czynienia w biologii, chemii, fizyce (np. w geofizyce, metrologii) lub w niektórych naukach technicznych (np. inżynierii procesowej). To jest jednak pogląd mylny. Po prostu ww. nauki rozwijały się zawsze sprawniej od teorii ekonomii”. Proste, prawda?

ZAJRZYJMY DO ORYGINAŁU!

Po tej ponownej lekturze tekstów odnoszących się do artykułu Barnetta zrobiłem coś, co powinienem zrobić co najmniej pięć lat temu, a czego nie uczyniłem (ale, jak mi nie mam, nie zrobiła tego też większość (jeśli nie wszyscy) autorów, łącznie z Barnettem). Sięgnąłem do oryginalnej pracy Cobba i Douglasa z 1928 roku⁸. Jakież było moje zdziwienie, kiedy skonstatowałem, że to co używane jest jako funkcja Cobba-Douglasa we współczesnej literaturze i w podręcznikach ekonomii nie ma wiele wspólnego z oryginalną propozycją Cobba i Douglasa.

Co zrobili Cobb i Douglas? Zebrali dane statystyczne dotyczące wielkości zaangażowanego kapitału i pracy oraz wielkości produkcji w gospodarce amerykańskiej (w sektorze produkcji przemysłowej) z lat 1899–1922. Te oryginalne dane statystyczne, którymi posługiwali się Cobb i Douglas, są przedstawione w trzech kolejnych tabelach (rysunki 1, 2 i 3 zawierają odpowiednio tabele II, III i IV z oryginalnej wersji artykułu z 1928 r.). Tak na marginesie: dane te obejmują też okres kryzysu w latach 1920–1921, co widać chociażby po dużym spadku inwestycji w latach 1921 i 1922 – patrz pierwsza kolumna w Table II (rys. 1) oraz spadku produkcji w 1921 r. (patrz Table IV, rys. 3).Warte podkreślenia i godne zauważenia jest to, że już w 1922 r. produkcja wyraźnie wzrosła. Głębokość depresji 1920–1921 była podobna jak depresji z 1929 r., różnica jest jedynie w tym, że wyjście z depresji lat 1920–1921 dokonało się głównie dzięki spontanicznym siłom rynkowych, a wyjście z depresji 1929 r. odbywało się przy dużej interwencji państwa. Gospodarka amerykańska wyszła z kryzysu 1920–1921 bardzo szybko, a z kryzysu w 1929 r. wychodziła przez następne 10 lat. Dlatego też często kryzys 1920–1921 nazywany jest ‘kryzysem, o którym nie słyszeliście’ albo ‘zapomnianym kryzysem’.

⁸ Cobb, Douglas (1928).

**Rysunek 1. Oryginalna tabela z artykułu Cobba i Douglasa (1928)
zawierająca dane statystyczne o zaangażowanym kapitale w sektorze
produkcyjnym Stanów Zjednoczonych w latach 1899–1922**

TABLE II
ESTIMATED ANNUAL ADDITIONS TO FIXED CAPITAL IN MANUFACTURING TOGETHER WITH
CUMULATIVE TOTAL CAPITAL AS EXPRESSED IN TERMS OF COST AND 1890 PRICES
(Millions of dollars), 1899–1922

Year	Annual Increase in Terms of Cost Price (1)	Cost Index (1890–100) (2)	Annual Increase in Terms of 1890 dollars (3)	Total Fixed Capital in 1890 dollars (4)	Relative Total Capital 1890–100 (5)
1899	339	88	387	4449	100
1900	264	89	297	4746	107
1901	277	88	315	5081	114
1902	342	89	383	5444	122
1903	328	91	362	5806	131
1904	282	87	326	6132	138
1905	437	92	494	6626	149
1906	612	100	611	7237	163
1907	629	106	595	7832	176
1908	373	94	397	8329	183
1909	589	96	591	8820	198
1910	422	100	420	9240	208
1911	379	99	384	9624	216
1912	437	103	443	10067	226
1913	497	110	433	10520	230
1914	356	101	353	10873	244
1915	1017	105	967	11840	266
1916	1899	135	1402	13242	298
1917	2891	173	1673	14915	333
1918	2473	183	1350	16265	368
1919	1898	196	969	17234	387
1920	2096	237	884	18118	407
1921	780	184	424	18542	417
1922	1177	181	650	19192	431

**Rysunek 2. Oryginalna tabela z artykułu Cobba i Douglasa (1928)
zawierająca dane statystyczne o zaangażowanej liczbie pracowników
w sektorze produkcyjnym Stanów Zjednoczonych w latach 1899–1922**

TABLE III
THE PROBABLE AVERAGE NUMBER OF WAGE-EARNERS EMPLOYED IN MANUFACTURING
1899–1922

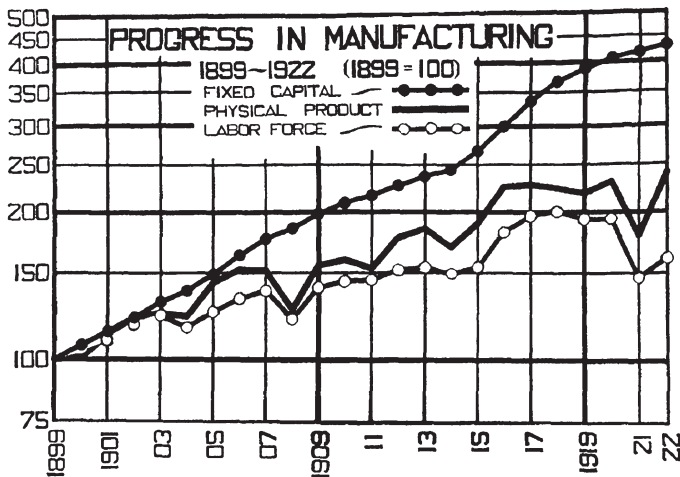
Year	Average Number Employed (in thousands)	Relative Number (1899=100)	Year	Average Number Employed (in thousands)	Relative Number (1899=100)
1899	4713	100	1911	6855	145
1900	4968	105	1912	7187	152
1901	5184	110	1913	7277	154
1902	5554	118	1914	7026	149
1903	5784	123	1915	7289	154
1904	5468	116	1916	8601	182
1905	5906	125	1917	9218	196
1906	6251	133	1918	9446	200
1907	6483	138	1919	9096	193
1908	5714	121	1920	9110	193
1909	6615	140	1921	6947	147
1910	6807	144	1922	7602	161

Rysunek 3. Oryginalna tabela z artykułu Cobba i Douglasa (1928) zawierająca dane statystyczne o wielkości produkcji materialnej Stanów Zjednoczonych w latach 1899–1922

TABLE IV
INDEX OF PHYSICAL VOLUME OF MANUFACTURES IN THE UNITED STATES

Year	Index of Manufactures	Year	Index of Manufactures
1899.....	100	1911.....	153
1900.....	101	1912.....	177
1901.....	112	1913.....	184
1902.....	122	1914.....	169
1903.....	124	1915.....	189
1904.....	122	1916.....	225
1905.....	143	1917.....	227
1906.....	152	1918.....	223
1907.....	161	1919.....	213
1908.....	126	1920.....	231
1909.....	155	1921.....	179
1910.....	159	1922.....	240

Rysunek 4. Oryginalny rysunek z artykułu Cobba i Douglasa (1928) obrazującego zmiany względne kapitału, wielkości zatrudnienia i wielkości produkcji w Stanach Zjednoczonych w latach 1899–1922



Najistotniejsze jest jednak to, że przy estymacji parametrów funkcji produkcji Cobb i Douglas posługiwali się nie wartościami bezwzględными, a wartościami względnymi (wskaźnikami). Dlatego w tabelach podane są te wartości względne: na rysunku 1 (Table II) wskaźnik zmian zaangażowanego kapitału przedstawiony jest w ostatniej kolumnie (w latach 1899–1922 kapitał ten wzrósł 4,31 razy), na rysunkach 2 i 3 (Table III i Table IV) autorzy podali tylko same wartości wskaźników zaangażowanej pracy i wielkości produkcji. Na rysunku 4 przedstawiono oryginalne wykresy zmian wskaźników zaangażowanego kapitału, zatrudnienia i wielkości produkcji.

Na rysunku 5 przedstawiono fragment oryginalnego tekstu Cobba i Douglasa dotyczącego ostatecznego wyboru postaci funkcji produkcji do estymacji para-

Rysunek 5. Fragment oryginalnego tekstu artykułu Cobba i Douglasa z 1928 roku

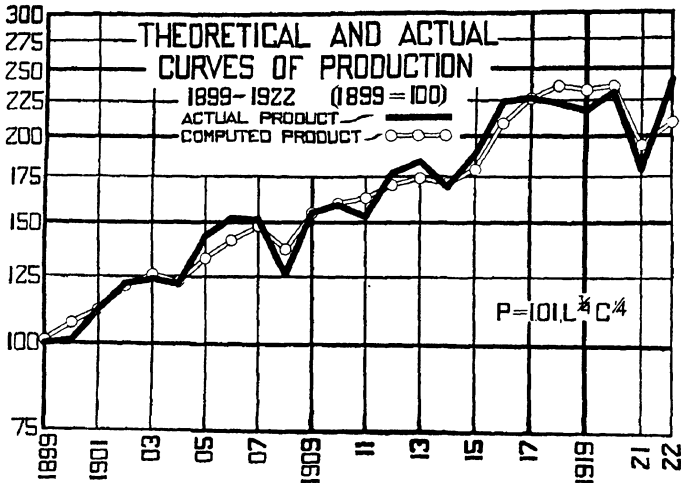
Among functions with these properties (1) and (2) let us make a definite choice³¹ and examine the consequences of that choice, reserving the right to make other choices if we wish. Let us choose the function

$$P' = bL^k C^{1-k}$$

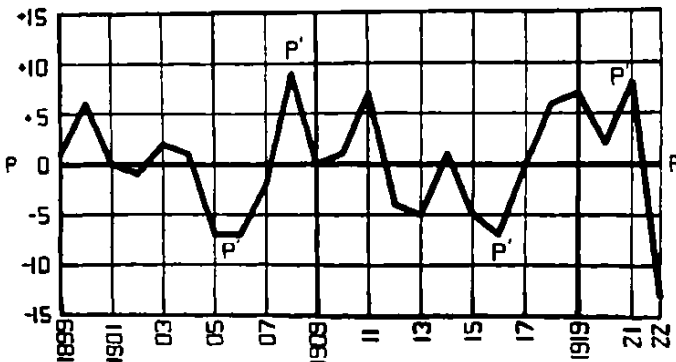
and find such numerical values of b and k that P' will "best" approximate P in the sense of the Theory of Least Squares. Then relative to the indices and the period we have the norm

$$P' = 1.01L^{3/4}C^{1/4}$$

Rysunek 6. Oryginalne wykresy z artykułu Cobba i Douglasa (1928) obrazującego jakość dopasowania funkcji produkcji do rzeczywistych danych o wielkości produkcji w Stanach Zjednoczonych w latach 1899–1922



PERCENTAGE DEVIATIONS OF COMPUTED FROM ACTUAL PRODUCT 1899 - 1922



metrów i aproksymacji rzeczywistej wielkości produkcji w Stanach Zjednoczonych. Warto zauważyć, że autorzy są świadomi potrzeby zachowania wielkiej ostrożności w wyborze postaci funkcji produkcji (jak sami piszą: "rezerwując sobie prawo innego wyboru, jeśli sobie tego zażyczymy"); P , L i C oznaczają odpowiednio wskaźniki wielkości produkcji, wielkości zatrudnienia i zaangażowanego kapitału. Cobb i Douglas dokonują estymacji parametrów b i k , przyjmując za kryterium dopasowania do danych rzeczywistych miarę błędu średniokwadratowego.

Z tych estymacji wynika im, że $b = 1,01$ oraz $k = 3/4$ to optymalne wartości⁹. Jakość tego dopasowania pokazana jest na rysunku 6 (oryginalny wykres z artykułu Cobba i Douglasa). Zastanawia mnie (a może i niepokoje) otrzymana dosyć 'okrągła' wartość parametru k ($= 3/4$). Z reguły przy estymacji parametrów jakiejkolwiek funkcji wielkości optymalne parametrów są wartościami rzeczywistymi, których wartości zwykle zaokrągla się na którymś tam (np. czwartym) znaczącym miejscu.

Warto zatem zapisać w jawny sposób postać funkcji produkcji stosowanej przez Cobba i Douglasa:

$$\frac{P}{P_0} = b \left(\frac{L}{L_0} \right)^k \left(\frac{C}{C_0} \right)^{1-k}.$$

Stosując taką postać funkcji produkcji, Cobb i Douglas unikają wszelkich problemów związanych z analizą wymiarową, gdyż wszelkie używane przez nich zmienne są bezwymiarowymi wskaźnikami. Można by zatem powiedzieć, że przynajmniej w przypadku funkcji produkcji Cobba-Douglasa problem postawiony przez Barnetta samoistnie znika. Nie oznacza to, że postulowana przez Barnetta konieczność rygorystycznego stosowania analizy wymiarowej w ekonomii także przestaje być zasadna. Problem nadal istnieje i potrzeba ta jest tak samo ważna jak w fizyce oraz we wszelkich innych naukach.

Kiedy pięć lat temu pisaliśmy komentarz do artykułu Barnetta (Kwaśnicki, Zieliński, 2006) nie zajrzeliśmy (niestety, chciałoby się powiedzieć) do oryginalnego artykułu Cobba i Douglasa z 1928 roku. Teraz dopiero widzimy, jak wiele by to zmieniło, gdybyśmy to uczynili. Intuicyjnie jednak wyczuwaliśmy tok myślenia Cobba i Douglasa. Napisałobyśmy wtedy:

„Weźmy jako przykład funkcję popytu o stałej elastyczności cenowej:

$$Q = ap^\alpha.$$

Elastyczność α jest liczbą, która zmienia się w zależności od analizowanego rynku, może być różna w różnych okresach czasowych. Jeśli cena jest wyrażona w złotych, Q w sztukach (np. wihajstrów, telewizorów, samochodów), to a powinno mieć wymiar [szt. zł^{- α}]. Napotyamy tutaj problem postawiony przez Barnetta. W odróżnieniu od sytuacji w fizyce (np. przy równaniu na siłę przyciągania grawitacyjnego), gdzie wykładnik potęgi jest z reguły stały (w równaniu na

⁹ Te parametry b i k odpowiadają we współczesnej notacji parametrom A i $1 - \alpha$.

siłę grawitacji wykładnik przy odległości r jest równy 2). Zatem stała grawitacji G ma niezmienny wymiar niezależnie od tego, czy analizujemy siły przyciągania się mikrocząstek na ziemi czy siły przyciągania się planet. W sytuacji funkcji popytu już tak nie jest. Wymiar parametru a musiałby się zmieniać w zależności od tego, jaki rynek i w jakim czasie analizujemy (bo α nie jest stałą). Rozwiązaniem, które w takiej sytuacji można zastosować, jest wybór jakiejś ceny referencyjnej p_0 i odniesienie ceny bieżącej do ceny referencyjnej, czyli zapisanie funkcji popytu w postaci:

$$Q = a \left(\frac{P}{p_0} \right)^\alpha.$$

Wówczas wymiar parametru a jest równy [szt.] i niezależny od α , bo p/p_0 jest bezwymiarową liczbą rzeczywistą. Można zarzucić temu podejściu, że jest ono swego rodzaju 'proteżą', ale na obecnym etapie analizy ekonomicznej, kiedy chcemy stosować aparat matematyczny, jest to pewne wyjście, które umożliwia uniknięcie problemów metodologicznych, a nawet problemów natury fundamentalnej.

Podobnie można postąpić w przypadku funkcji produkcji, odnosząc bieżący kapitał i pracę do kapitału i pracy referencyjnej (K_0 i L_0): $Q = A \left(\frac{K}{K_0} \right)^\alpha \left(\frac{L}{L_0} \right)^\beta$.

A więc ta zaproponowana przez nas postać funkcji produkcji jest tożsama z tą zaproponowaną przez Cobb'a i Douglasa w 1928 roku¹⁰.

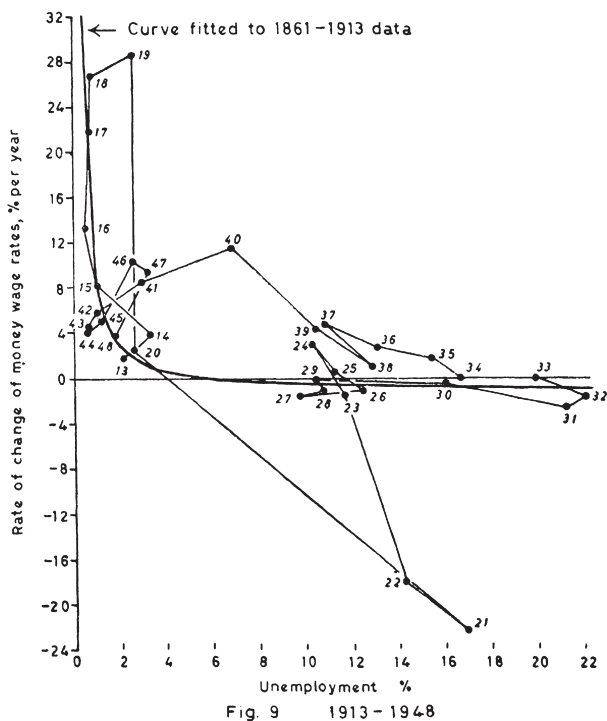
Jak już jesteśmy przy historii związanej ze zmianą interpretacji pewnych klasycznych pojęć, to wspomnę o, moim zdaniem, jednym z najważniejszych takich przypadków¹¹. W końcu lat 50. A.W. Phillips 'bawił się' danymi statystycznymi, dopasowując dane z rozwoju Wielkiej Brytanii w latach 1861–1957, i określił zależność między bezrobociem (U) i stopą zmian płac nominalnych (W). Opublikował te rozważania w sławnym artykule *Relationship between Unemployment and the Rate of Change of Money Wages in the United Kingdom 1861–1957*. Na rysunku 7 przedstawiono oryginalny wykres z tej publikacji. Artykuł Phillipsa jest przykładem dobrej, solidnej pracy ekonomisty-rzemieślnika (w pozytywnym słowa tego znaczeniu). Jednakże w 1960 r. Paul Samuelson i Robert Solow zamieścili w prestiżowym „American Economic Review” opracowanie pt. *Analytical Aspects of Anti-Inflation Policy*. W artykule tym dokonali reinterpretacji (słowo 'nadużycie' byłoby lepsze) krzywej zaproponowanej przez Phillipsa i przedstawili ją jako zależność między wielkością bezrobocia i inflacji. Stwierdzili oni, że istnieje wymiennosc pomiędzy inflacją a bezrobociem (wysoko-

¹⁰ Można sądzić, że De Jong (1967) też nie czytał oryginalnego artykułu Cobb'a i Douglasa, bo w przeczytanej przeze mnie dopiero teraz książce znalazłem podobną propozycję 'normalizacji' zmiennych w funkcji Cobb'a-Douglasa do referencyjnych wartości kapitału i pracy (K_0 i L_0). De Jong (1967, s. 48) pisze, że ta nowa postać funkcji produkcji „będzie nazywana »zrewidowaną wersją« funkcji produkcji Cobb'a-Douglasa (*the „revised version” of the Cobb-Douglas production function*).

¹¹ Na co od wielu lat zwracam uwagę studentom, kiedy omawiamy tzw. krzywą Phillipsa.

kiej inflacji towarzyszy niskie bezrobocie i odwrotnie, gdy chcielibyśmy zmniejszyć inflację, to musimy zgodzić się na to, aby wzrosło bezrobocie). Oryginalny wykres z pracy Samuelsona i Solowa, reinterpretujący krzywą Phillipsa, przedstawia rysunek 8. W roku 1961 Paul Samuelson włączył tak zreinterpretowaną krzywą Phillipsa do piątego wydania swojego podręcznika *Economics*, a że podręcznik ten był w tamtym czasie traktowany jako wzorcowy, to i wielu innych autorów podręczników (i artykułów naukowych) dokonało tego samego w następnych latach. W ten sposób kolejne pokolenia studentów uczone są tej błędnej postaci krzywej Phillipsa, ale – co gorsze – uczeni są przekonani, że taka krzywa może być podstawą prowadzenia polityki gospodarczej rządów (w tej postaci weszła do standardowego zestawu ‘narzędzi’ polityki gospodarczej keynesistów i neoklasyków). Nawiasem mówiąc, trzeba wykazać się naprawdę ‘dobrą wolą’, by na podstawie danych statystycznych (zebranych czy to przez Phillipsa, czy przez Samuelsona i Solowa), tak bardzo ‘rozrzuconych’ (np. rys. 7) zaproponować ‘gładką’ krzywą (rys. 8) obrazującą ‘zamiennosc inflacji i bezrobocia’, która to krzywa bez zastrzeżeń została przyjęta przez polityków gospodarczych.

Rysunek 7. Oryginalny rysunek z pracy A.W. Phillipsa obrazujący zależność między wielkością bezrobocia a stopą zmian płac



Rysunek 8. Reinterpretacja krzywej Phillipsa dokonana przez Samuelsona i Solowa

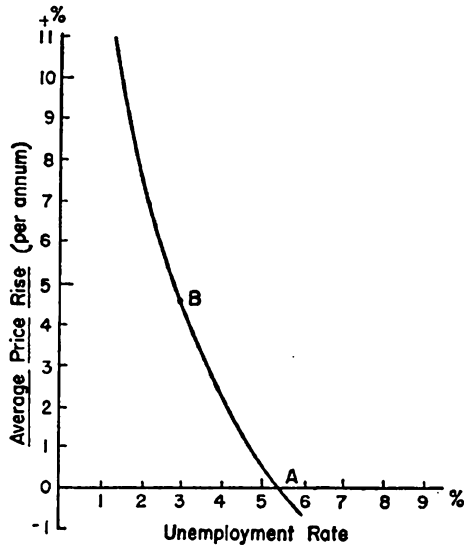


FIGURE 2

MODIFIED PHILLIPS CURVE FOR U.S.

This shows the menu of choice between different degrees of unemployment and price stability, as roughly estimated from last twenty-five years of American data.

PODSUMOWANIE

Jeżeli w analizie ekonomicznej stosujemy modele formalne (matematyczne), to bezwzględnie, tak jak to jest np. w fizyce, powinniśmy przestrzegać zgodności wymiarów we wszystkich stosowanych równaniach. Jeśli w tych równaniach występują parametry posiadające jakieś wymiary, to wymiary tych parametrów powinny być niezmiennie w czasie oraz niezależne od regionu, kraju, sektora, gałęzi przemysłu (generalnie miejsca), do którego te równanie się stosuje. Ekonomiści w swoich pracach powinni przynajmniej zasygnalizować czytelnikowi, że są świadomi problemu wymiarowości w stosowanej przez nich analizie.

Warto jednak powiedzieć, że powszechna dążność ekonomii ortodoksyjnej do opisu ilościowego zjawisk gospodarczych nie oznacza, że opis taki jest pełny i adekwatny. W ekonomii (ale także w innych naukach, np. fizyce, o czym pisał np. Feynman) opis ilościowy czy formalny nie jest tożsamy ze zrozumieniem zjawiska. W tym kontekście warto zacytować opinię Daniela Yankelowicha (teoretyka, profesora psychologii, ale także praktyka – założyciela znanej firmy badającej rynki) o nadmiernej ufności pokładanej w liczbach i liczeniu: „Krok pierwszy to zmierzyć i policzyć to, co może być łatwo zmierzone i policzone. I to jest całkiem okej. Krok drugi to pominąć to, czego nie da się zmierzyć i policzyć albo przypisać temu czemuś jakąś arbitralną wartość liczbową. To jest posunięcie sztuczne, które wprowa-

dza nas w błąd. Krok trzeci to przyjąć, że to, co nie da się zmierzyć i policzyć, tak naprawdę nie jest zbyt ważne. To jest ślepotą. Krok czwarty to stwierdzić, że to, czego się nie da zmierzyć i policzyć, właściwie nie istnieje. To samobójstwo”¹².

BIBLIOGRAFIA

- Barnett William II (2003), *Dimensions and Economics: Some Problems*, „The Quarterly Journal of Austrian Economics”, Vol. 6, No. 3 (Fall 2003): 27–46, (www.mises.org/journals/qjae/pdf/qjae6_3_2.pdf; poprawiona wersja w Vol. 7, No. 1 (Spring 2004), mises.org/journals/qjae/pdf/qjae7_1_10.pdf); polskie tłumaczenie: Wiliam BARNETT II, *Wymiary a ekonomia; niektóre problemy*, „Studia Ekonomiczne” 2006, nr 3 (Dostępne pod: <http://kwasnicki.prawo.uni.wroc.pl/todownload/BarnettWymiary.pdf>).
- Bednarski T. (2006), *Głos polemiczny do artykułu Williama Barnetta*, „Studia Ekonomiczne”, nr 3.
- Bogle J.C. (2009), *Dość. Prawdziwe miary bogactwa, biznesu i życia*, Polskie Towarzystwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Cobb C.W., Douglas P.H. (1928), *A theory of production*, “American Economic Review”, 18 (1): 139–165. Supplement, Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association.
- Czerwiński Z. (2006), *Kilka słów o sprawie wymiarów w ekonomii*, „Studia Ekonomiczne”, nr 3.
- De Jong F. (1967), *Dimensional Analysis for Economists*, North-Holland, Amsterdam.
- Douglas P.H. (1976), *The Cobb-Douglas production function once again: its history, its testing, and some empirical values*, “Journal of Political Economy”, Vol. 84, s. 903–115.
- Feynman R.P. (2005), *Przyjemność poznawania*, Prószyński i S-ka, Warszawa.
- Hockuba Z. (2006), *Złożoność a ekonomia: wybrane problemy. Uwagi na marginesie artykułu Williama Barnetta II*, „Studia Ekonomiczne”, nr 3.
- Kasprzak W., Lysik B., Rybaczuk M. (1990), *Dimensional Analysis in the Identification of Mathematical Models*, World Scientific Pub Co Inc. (Dostępne też w Google Books: http://books.google.pl/books?id=A0FkivhdWl8C&pg=PP1&lpg=PP1&dq=Kasprzak,+Bertold+Lysik&source=bl&ots=4j7nq8xZ_f&sig=VkO35sWBFjH8b1CG2Evndpr02WY&hl=pl&ei=V1qsToqgFsih4gS7g4GPDw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&sqi=2&ved=0CCEQ6AEwAA#v=onepage&q&f=false).
- Kasprzak W., Lysik B. (1978), *Analiza wymiarowa w projektowaniu eksperymentu*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław.
- Kostro K. (2006), *Barnett, szkoła austriacka a wymiary w ekonomii*, „Studia Ekonomiczne”, nr 3.
- Kwaśnicki W., Zieliński M. (2006), *Uwagi do artykułu Barnetta „Wymiary a ekonomia”*, „Studia Ekonomiczne”, nr 3.
- Malawski A. (2006), *Nieco hałasu o coś, czyli kilka uwag ad hoc o wymiarowości w ekonomii*, „Studia Ekonomiczne”, nr 3.

¹² Za: Bogle (2009), s. 132–133.

- Mises L. von (2007), *Ludzkie działanie*, Fijorr Publishing Company Warszawa.
- Panek E. (2006), *Uwagi na marginesie artykułu W. Barnetta „Dimensions and economics: some problems”*, „Studia Ekonomiczne”, nr 3.
- Phillips A.W. (1958), *Relationship between unemployment and the rate of change of money wages in the United Kingdom 1861–1957*, „Economica”, November, s. 283–299.
- Przyłuski K.M. (2006), *Wymiary a ekonomia: nie ma problemu*, „Studia Ekonomiczne”, nr 1–2.
- Samuelson P.A., Solow R.M. (1960), *Analytical aspects of anti-inflation policy*, „American Economic Review”, 50(2), s. 177–194.
- Żylicz T. (2006), *Czy w ekonomii jednostki pomiaru coś znaczą?*, „Studia Ekonomiczne”, nr 3.

ZAŁĄCZNIK

WYMIARY W FIZYCE

(Opracowane na podstawie: R. Resnick, D. Halliday, *Fizyka dla studentów nauk przyrodniczych i technicznych*, tom 1, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975, s. 784–799).

Układ SI (Système International d’Unités); zatwierdzony w 1960 r.

Nazwa	Jednostka	Wielkość fizyczna
Metr	m	długość
Kilogram	kg	masa
Sekunda	s	czas
Amper	A	natężenie prądu elektrycznego
Kelwin	K	temperatura
Kandela	cd	natężenie światła, światłość
Mol	mol	liczność materii

Jednostki uzupełniające

Nazwa	Jednostka	Wielkość fizyczna	Informacje dotyczące jednostki (liczby niemianowane)
Radian	rad	miara kąta płaskiego	$[\text{rad}] = \left[\frac{\text{m}}{\text{m}} \right] = [1]$
Steradian	sr	miara kąta bryłowego	$[\text{sr}] = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{m}^2} \right] = [1]$

Przykładowe wielkości pochodne

Wielkość	Nazwa	Oznaczenie	W jednostkach podstawowych
Siła	niuton	N	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Ciśnienie	paskal	Pa	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Energia, praca	dżul	J	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
Moc	wat	W	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$
Ładunek elektryczny	kulomb	C	A · s
Napięcie elektryczne	wolt	V	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$
Pojemność elektryczna	farad	F	$\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$
Rezystancja	om	Ω	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}$
Przewodność elektryczna	simens	S	$\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{A}^2$
Strumień magnetyczny	weber	Wb	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$
Indukcja magnetyczna	tesla	T	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$
Indukcyjność	henr	H	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$

STRESZCZENIE

Ekonomia głównego nurtu (a zwłaszcza ekonomia neoklasyczna) uznaje fizykę za swój metodologiczny wzorzec. Jeśli tak, to ekonomiści głównego nurtu, wykorzystując formalizm matematyczny do opisu zjawisk gospodarczych, powinni też przestrzegać analizy wymiarowej (czyli dokonywać tzw. rachunku mian). Dlaczego zatem ekonomiści tak bardzo stronią od analizy wymiarowej?

Artykuł ten jest kontynuacją dyskusji na temat analizy wymiarowej w ekonomii, jaka toczyła się na łamach „Studiów Ekonomicznych” w 2006 roku. Po przedstawieniu problemów ze stosowaniem analizy wymiarowej w ekonomii dokonano krytycznej analizy tekstów polskich ekonomistów o analizie wymiarowej opublikowanych w latach 2006 i 2007 w „Studiach Ekonomicznych”. W trzeciej części artykułu opisano oryginalne wyniki prac Charlesa Wigginsa Cobba i Paula Howarda Douglasa z 1928 roku. Pokazano tam, jak bardzo obecne stosowanie funkcji Cobba-Douglasa we współczesnej literaturze i w podręcznikach ekonomii różni się od oryginalnej propozycji jej autorów.

Słowa kluczowe: analiza wymiarowa, metodologia, funkcja produkcji, ekonomia matematyczna.

PROBLEMS OF DIMENSIONAL ANALYSIS IN ECONOMICS

ABSTRACT

Mainstream economists (and especially neoclassical ones) treat physics as their methodological standard. Thus, apart from using mathematical formalism to describe economic phenomena, they should also comply with the dimensional analysis. Why do they shun it, then?

This article is a continuation of discussions on dimensional analysis in economics presented in *The Economic Studies* in 2006 and 2007. It describes problems with the use of dimensional analysis in economics and proceeds to critical analysis of Polish economists' opinions presented in the papers on dimensional analysis published in 2006 and 2007 in *The Economic Studies*. The third part of the paper presents the results of Charles Wiggins Cobb and Paul Howard Douglas research published in 1928. It also shows how modern use of the Cobb-Douglas function in contemporary literature and economics textbooks differs from the original proposal of Cobb and Douglas.

Keywords: dimensional analysis, methodology, production function, mathematical economics.

JEL Classification: A20, C10, C49, C51, C65, E10