William Barnett II*
tłum.: Marcin Zieliński+

Wymiary[1] a ekonomia: niektóre problemy

(...) jednostki wszystkich fizycznych wielkości, a także ich wartości, [powinny być zawarte] we wszystkich obliczeniach[2]. Będziemy tak konsekwentnie czynić we wszystkich przykładach w książce.

Sears i Zemansky, *University Physics* 1955

Przy korzystaniu w pracy naukowej z matematyki konieczne jest konsekwentne i prawidłowe posługiwanie się wymiarami. Samo istnienie wymiarów stanowi o możliwości popełnienia błędów - łatwo je pominąć, gdy powinny być użyte, nieprawidłowo zastosować, itp. Dzięki nim możliwe jest jednak przeprowadzenie analizy wymiarowej, która w znaczącym stopniu pozwala uniknąć błędu. W równaniu $y = f(\bullet)$, jeśli y powinien mieć wymiar, to f także powinien go posiadać, i powinien on być identyczny z wymiarem y; jeśli y jest bezwymiarowy, to f również powinien być bezwymiarowy. Ta analiza $y = f(\bullet)$ pozwala określić: (1) jaki wymiar, o ile w ogóle, powinien posiadać y i każdy z elementów f, a zatem jaki wymiar powinien posiadać sam f; oraz (2) czy wymiary f i y są identyczne, co jest koniecznym, chociaż nie wystarczającym, warunkiem, aby równanie było prawidłowe. Błąd ujawniony przez prawidłowo przeprowadzoną analizę wymiarową oznacza fundamentalny problem[3]. Trudno zatem przecenić istotność wymiarów dla nauki.

W dwóch pierwszych częściach tego artykułu rozpatrzymy kolejno następujące problemy,

---

*Artykuł ukazał się pierwotnie w „Quarterly Journal of Austrian Economics” vol. 6, no. 3, 2003, s. 27-46.

William Barnett II jest profesorem nadzwyczajnym na Uniwersytecie Loyola w Nowym Orleanie. Autor chciałby podziękować anonimowemu recenzentowi „Quarterly Journal of Austrian Economics” za trzeźwe i bardzo pomocne komentarze do wcześniejszego szkicu. Autor chciałby również podziękować swojemu koledze, Walterowi Blockowi, bez którego zachęty i pomocy ten artykuł nigdy nie ujrzałby światła dziennego.

+Marcin Zieliński jest studentem ekonomii na Uniwersytecie Wrocławskim i współpracownikiem Instytutu Ludwiga von Misesa. Tłumacz chciałby podziękować prof. Witoldowi Kwaśnickiemu, mgr. Mateuszowi Machajowi oraz Janowi Lewińskiemu za cenne uwagi w trakcie tłumaczenia artykułu. Kontakt z tłumaczem: marcin.zielinski@mises.pl.

[1] Termin „wymiar” został użyty w znaczeniu ogólnym, a termin „jednostka” w szczegółowym. Tak więc odległość jest wymiarem, a centymetry, metry i stopy są różnymi jednostkami wymiaru, jakim jest odległość.

[2] Sears i Zemansky [1955, s. 3] rozróżniają jednostki i wielkości, wielkości są samymi liczbami:

> Powinniśmy przyjąć konwencję, że algebraiczny symbol przedstawiający wielkość fizyczną, taką jak F, p czy v, oznacza się zarówno *liczbą*, jak i *jednostką*. Na przykład, niech F będzie siłą 10 N, p ciśnieniem 15 N/m^2, a v prędkością 15 m/s. Mamy równanie $x = v_0t + ½ at^2$. Jeśli x jest wyrażony w metrach, to wtedy v_0t i $½at^2$ muszą być również wyrażone w metrach. Załóżmy, że t jest wyrażone w sekundach. Wtedy jednostką v_0 musi być m/s, a jednostką a musi być m/s^2. (Wyraz ½ jest *samą liczbą*, bez jednostek.)

[3]Sears, Zemansky i Young piszą:

> Kiedy problem wymaga obliczeń z użyciem liczb i jednostek, to liczby powinny zawsze być zapisywane z odpowiednimi jednostkami, a jednostki powinny być wyprowadzone przez wyliczenie ich tak jak w przykładzie powyżej. To pozwala bez problemu sprawdzić obliczenia. *Jeśli na którymś etapie obliczeń odkryjecie, że równanie czy wyrażenie posiada niespójne jednostki, to wiecie, że popełniliście gdzieś błąd*. W tej książce będziemy zawsze wyprowadzać jednostki przy obliczeniach i gorąco namawiamy do stosowania tej procedury przy rozwiązywaniu problemów [1987, s. 7; kursywa Barnetta].

„Analiza wymiarowa jest stosowana w celu sprawdzenia spójności wymiarów w relacjach matematycznych (...) *[j]eżeli wymiary nie są takie same, to relacja jest błędna*” [Cutnell i Johnson, 2001, s. 6; kursywa Barnetta].

które powstają, kiedy nie ma prawidłowo zawartych wymiarów w modelach ekonomicznych: (1) brak uzasadnienia lub sensu ekonomicznego; (2) zmienność – tj. ta sama stała lub zmienna posiada różne wymiary, czyli tak jakby prędkość mierzyć raz w metrach na sekundę, a kiedy indziej w samych metrach lub w metrach do kwadratu na sekundę[4]. W trzeciej części uwzględniono makroekonomiczny przykład „problemu wymiarów" pochodzący z artykułu zamieszczonego w jednym z numerów czołowego anglojęzycznego czasopisma ekonomicznego. Część czwarta zawiera dyskusję, a część ostatnia, wnioski.

Analiza zawarta w tym artykule dotyczy funkcji produkcji oraz przypadku zwiększenia liczby niezależnych zmiennych, a także alternatywnych form funkcyjnych[5]. Ponadto, analiza ta dotyczy innych funkcji używanych w teorii ekonomii, np. funkcji użyteczności, popytu i podaży.

Wymiary bez uzasadnienia i sensu ekonomicznego

Jedną z powszechnie używanych funkcji[6] jest dwuczynnikowa funkcja produkcji Cobba-Douglasa (CD). Typowa funkcja CD jest dana przez $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$, gdzie Q jest zmienną wyjściową; K i L są zmiennymi wejściowymi, odpowiednio kapitałem i pracą; A może być zarówno stałą, jak i zmienną; a α i β są elastycznościami zmiennej wyjściowej względem odpowiednio kapitału i pracy. Rozpatrzmy dwuczynnikową funkcję produkcji CD dla pewnego specyficznego dobra, które nazwiemy *wihajstrami*. Jeżeli wymiary zostały zastosowane prawidłowo, to produkcja, kapitał i praca muszą mieć zarówno wielkość, jak i *wymiar(-y)*, a α i β są samymi liczbami. Załóżmy, na przykład, że[7]:

(1) Q jest mierzone w *wihajstrach*/*czas* [*whj*/*rok*];

---

[4] *Nie* chodzi tu o problemy ukryte w agregacji; mogą one występować i występują w modelach z jednym dobrem i jednym zasobem, pracą. Kwestie omawiane tutaj są nawet bardziej elementarne i miażdżące dla ekonomii matematycznej i ekonometrii niż te związane z agregacją.

[5] Chociaż nie jest to bezpośrednio związane z przedmiotem naszej dyskusji, to należy wspomnieć, że istnieje fundamentalny problem, jeżeli chodzi o użycie funkcji matematycznych w ekonomii. Jedynym warunkiem *sine qua non* dla funkcji jest to, że dla określonego zbioru wartości zmiennych niezależnych, musi istnieć *jedna* wartość zmiennej zależnej. „Niech X i Y będą zbiorami niepustymi. Niech f będzie zbiorem uporządkowanych par (x, y), gdzie $x \in X$, a $y \in Y$. Zatem f jest funkcją z X w Y, jeśli każdemu $x \in X$ zostanie przyporządkowany *jeden, i tylko jeden* $y \in Y$" [Thomas, 1968, s. 13; kursywa Barnetta]. Niepoprawne jest zatem przedstawienie relacji produkcyjnych w jakimkolwiek przypadku, w którym istnieje Leibensteinowska nieefektywność *X*. Przykład takiej sytuacji czytelnik znajdzie w przypisie 12.

[6] Za mało powiedziane. Nie będzie prawdopodobnie przesadą stwierdzenie, że CD jest najczęściej używaną przez ekonomię neoklasyczną funkcją matematyczną.

[7] Jako że w ekonomii nie istnieją standardowe układy wymiarów czy jednostek, to używa się określonych, niestandardowych jednostek. Należy zauważyć, że jeśli kwestie te ograniczymy jedynie do modeli matematycznych, to problem wymiarów/jednostek może być zwyczajnie, chociaż będzie to niewybaczalne, pominięty. Nie można tak już jednak postąpić przy estymacji w modelach ekonometrycznych. Wtedy dane muszą być użyte. Jeśli każda zmienna jest mierzona w jednostkach pieniężnych, to nie ma problemu wymiarów. Oczywiście, mierzenie każdej zmiennej w jednostkach pieniężnych sprawia, że pojawiają się inne problemy. Zwróćmy uwagę, że chociaż niektóre zmienne wejściowe mogą być, i czasami są, mierzone w kategoriach niecenowych (tj. „realnych") jednostek (np. roboczogodzin w przypadku pracy), to zmienna kapitału wciąż jest mierzona w jednostkach cenowych (tj. pieniężnych), a zmienna wyjściowa jest niemal zawsze mierzona w jednostkach pieniężnych. Z jednej strony powstaje problem agregacji dóbr kapitałowych; z drugiej istnieje problem popadania w błędne koło przy pomiarze wartości kapitału z powodu roli, jaką odgrywa stopa procentowa w wyznaczaniu obecnej wartości dóbr kapitałowych i roli, jaką odgrywa ilość dóbr kapitałowych w określaniu stopy procentowej. Na ten temat patrz [Harcourt, 1972, s. 1-46].

Co więcej, jeśli używamy jednostek realnych, wtedy funkcja produkcji jest zgodna z teorią ekonomii w przypadku określonych wielkości różnych wkładów wykorzystanych do wyprodukowania określonej ilości dóbr. Jednakże, jeśli używamy jednostek pieniężnych, to wtedy funkcja produkcji stawia teorię ekonomiczną na głowie, gdyż określona wartość różnych wkładów pozwala wytworzyć określoną wartość produkcji. Ale teoria ekonomii uczy, że wartość wkładu zależy od wartości produkcji. (Autor dziękuje anonimowemu recenzentowi za zwrócenie mu na to uwagi.)

(2) K jest mierzone w *maszynogodzinach*/*czas* [*mg*/*rok*]; oraz,

(3) L jest mierzone w *roboczogodzinach*/*czas* [*rg*/*rok*].

Zatem analiza wymiarowa funkcji produkcji $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ pozwala ustalić, że A ($= Q/K^{\alpha}L^{\beta}$) jest mierzone w: [*wihajstry*/*czas*]/[(*maszynogodziny*/*czas*)$^{\alpha}$•(*roboczogodziny*/*czas*)$^{\beta}$]; tj. w: [$whj \bullet rok^{\alpha+\beta-1}$]/[$mg^{\alpha} \bullet rg^{\beta}$].

Dopuszczalne są tylko dodatnie wartości parametrów α i β, gdyż wartość ujemna jednego z nich, lub obu, oznaczałaby ujemną lub zerową marginalną produktywność wkładu(-ów). Jeśli $\alpha = \beta = 1$, to wymiary K^{α}, L^{β} oraz Q – czyli odpowiednio maszynogodziny na rok, roboczogodziny na rok, wihajstry na rok – mają uzasadnienie. Ale wtedy wymiarami A są wihajstry na (maszynogodziny • roboczogodziny) na rok, czyli [whj/(mg•rg)/rok]. Jeżeli te wymiary mają mieć uzasadnienie, to wymaga to co najmniej, żeby produkt maszynogodzin i roboczogodzin miał uzasadnienie, co w rzeczywistości jest dosyć wątpliwym twierdzeniem. Jednak nawet jeśli te wymiary mają uzasadnienie w tym przypadku, to nie mają one sensu ekonomicznego. Jeżeli $\alpha = \beta = 1$, to marginalny produkt zarówno K, jak i L jest dodatnią stałą (zostaje pogwałcone prawo malejących przychodów) i mamy do czynienia z nadmiernie dużymi oszczędnościami skali – podwojenie obu wkładów oznaczałoby, *ceteris paribus*, czterokrotne zwiększenie produkcji.

Rozpatrzmy przypadek inny niż $\alpha = \beta = 1$, czyli wtedy, gdy α lub β, lub oba, mają wartości niecałkowite lub wartości całkowite równe lub większe od dwóch. Niecałkowite wartości α, β, lub obu dają w efekcie takie jednostki jak np. [(roboczogodziny/rok)$^{0.5}$] lub [(roboczogodziny/rok)$^{1.5}$] dla L^{β}, podobnie będzie w przypadku K^{α}. Jednak pierwiastki kwadratowe z roboczogodzin czy lat są pojęciami nie mającymi uzasadnienia, podobnie jak pierwiastki kwadratowe z sześcianów roboczogodzin i sześcianów lat. Także całkowite wartości równe lub większe od dwóch dla α, β, lub obu dają w efekcie takie jednostki jak np. [(roboczogodziny/rok)^{2}] lub [(roboczogodziny/rok)^{3}] dla L^{β}, podobnie będzie w przypadku K^{α}. Jednak roboczogodziny czy lata do kwadratu są pojęciami nie mającymi uzasadnienia, tak jak roboczogodziny czy lata do sześcianu i podobnie jest w przypadku maszynogodzin. (Jednostki A są jeszcze mniej znaczące, o ile to w ogóle możliwe.) Zatem, bez względu na wartości α i β, wymiary albo nie mają uzasadnienia albo sensu ekonomicznego.

Jeśli używamy tej samej dwuczynnikowej funkcji produkcji CD, $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$, ale Q jest produkcją zagregowaną, to mamy wtedy do czynienia ze zagregowaną, czyli makroekonomiczną, funkcją produkcji. Jednakże, z tych samych powodów jak w funkcji mikroekonomicznej, prawidłowe użycie wymiarów prowadzi do używania wymiarów nie mających uzasadnienia lub sensu ekonomicznego. Dodatkowo w przypadku makroekonomicznym, powstaje problem agregacji.

Problem wymiarów, które nie mają uzasadnienia lub sensu ekonomicznego, nie może zostać wyeliminowany przez użycie bardziej złożonych funkcji produkcji, takich jak funkcja o stałej elastyczności substytucji (*constant elasticity of substitution* – CES); może to jedynie pogorszyć sytuację.

Prawidłowe użycie wymiarów w tych przykładach sprawia, że nie mają one uzasadnienia albo sensu ekonomicznego. Jednakże, ten problem jest widoczny tylko wtedy, gdy wymiary są poprawnie zawarte w modelu, co jest rzadkim[8] przypadkiem w modelowaniu ekonomicznym.

Niestałe wymiary

Powtórzmy, problem polega na tym, że te same stałe lub zmienne posiadają różne wymiary, czyli tak jakby prędkość mierzyć raz w metrach na sekundę, a kiedy indziej w samych metrach lub

[8] Jedynymi znanymi autorowi przypadkami są niektóre przykłady zawierające równanie wymiany Fishera.

w metrach do kwadratu na sekundę. Można to zilustrować przez porównanie teorii grawitacji Newtona[9] z funkcjami produkcji. Grawitacja jest siłą. Siła (F) oddziaływująca na ciało może być mierzona jako iloczyn masy (m) i przyspieszenia (a);[10] tj. $F = m \cdot a$. W układzie jednostek mks (metr-kilogram-sekunda) jednostką F jest kilogram•metr/sekunda^2; tj. [kg•m/s^2]. Prawo powszechnej grawitacji Sir Izaaka Newtona można wyrazić następująco:

> Każda cząstka materii we wszechświecie przyciąga każdą inną cząstkę z siłą, która jest wprost proporcjonalna do ilorazu mas tych cząstek (m i m') i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości pomiędzy nimi (r^2).
>
> $$F \sim mm'/r^2.$$
>
> Powyższa proporcja może zostać zamieniona na równanie po przemnożeniu [prawej strony] przez stałą G, nazywaną stałą grawitacji:
>
> $F = G \cdot (mm'/r^2)$ [Sears i Zemansky, 1955, s. 79].

Zatem: $G = F/(mm'/r^2)$. Logiczna i fizyczna spójność wymaga, aby G miało wymiary $F/(mm'/r^2)$. Jeśli używamy układu mks, to $F/(mm'/r^2)$ ma jednostkę [m^3]/[kg•s^2]; zatem G musi mieć jednostkę [m^3]/[kg•s^2].

Ten wynik jest niezmienny dla niezliczonych pomiarów G od przeszło trzech wieków: niezależnie od wartości, wymiary zawsze miały postać odległość^3/(masa•czas^2); tj. w układzie mks [m^3/(kg•s^2)].

Niestety, inaczej jest w ekonomii. Porównajmy ten wynik – niezmienność wymiarów – z wynikami pomiarów dwuczynnikowej funkcji produkcji CD. Takie pomiary dają szacunkowe wartości α, β i A. Prawie zawsze alternatywne wartości szacunkowe α, β i A różnią się. Nie jest to zaskakujące, ale stanowi poważny problem. Jako że A posiada zarówno wartość, jak i wymiary, to różne wartości α i β oznaczają różne wymiary A i mimo że wymiary, w jakich dokonuje się pomiaru Q, K i L są stałe, to wymiary A są zmienne. Na przykład, niech Q, K i L będą mierzone w tych samych jednostkach, co w części „Wymiary bez uzasadnienia i sensu ekonomicznego". Jeśli wartości α i β wynoszą odpowiednio 0.5 i 0.5, to jednostką A jest [whj/(mg$^{0.5}$ • rg$^{0.5}$)]; jeśli jednak wartości α i β wynoszą odpowiednio 0.75 i 0.75, to jednostką A jest [(whj • rok$^{0.5}$)/(mg$^{0.75}$ • rg$^{0.75}$)].

Problem niestałych wymiarów (lub nie mających sensu ekonomicznego wyników) nie może zostać wyeliminowany przez użycie bardziej złożonych funkcji produkcji, takich jak CES; może to jedynie pogorszyć sytuację.

A zatem prawidłowe użycie wymiarów w tym przykładzie przynosi niestałe wymiary. Niestałe wymiary są oczywiście wynikiem absurdalnym. Problem ten staje się jednak oczywisty tylko wtedy, gdy wymiary są poprawnie zawarte w modelu, co jest rzadkim przypadkiem w modelowaniu ekonomicznym.

Przykład makroekonomiczny

Rozważmy następujący przykład, wzięty z modelu, który pojawił się w jednym z numerów czołowego anglojęzycznego czasopisma ekonomicznego.

1. W części o gospodarstwach domowych, „[f]unkcja H mierzy ujemną użyteczność pracy, która zależy od czasu liczonego w godzinach (N) i wysiłku (U)." Argumenty funkcji użyteczności przeciętnego gospodarstwa domowego obejmują $\sum \beta^l H(N_t, U_t)$; $t = 0 \ldots \infty$, gdzie „$\beta \in [0, 1]$ jest

---

[9] Mimo, że ta analiza zawiera teorię grawitacji Newtona, to skutki tej analizy są wiążące dla wszystkich zastosowań analizy wymiarowej w naukach przyrodniczych.

[10] Prawdą jest, że siła jest wielkością wektorową, tj. posiada kierunek oraz wartość [Sears, Zemansky i Young, 1987, s. 10]. Dla tej analizy jest to jednak nieistotne.

czynnikiem dyskontowym," a t jest indeksem czasu[11].

2. Część o firmach zakłada, że

> [i]stnieje continuum firm rozmieszczonych równo w jednostkowych odstępach. Każda firma jest umieszczona w indeksie $i \in [0, 1]$ i produkuje zróżnicowane dobro przy technologii $Y_{it}=Z_t L_{it}^{\alpha}$. L_i można zinterpretować jako ilość wkładu efektywnej pracy użytej przez firmę, która jest funkcją czasu i wysiłku: $L_{it} = N_{it}^{\theta} U_{it}^{1-\theta}$, gdzie $\theta \in [0, 1]$. Z jest indeksem zagregowanej technologii i przyjmuje się, że jego stopa wzrostu będzie przebiegać zgodnie z niezależnie i jednakowo rozmieszczonym procesem $\{\eta_t\}$, przy $\eta_t \sim N(0, s_z^2)$. Formalnie, $Z_t = Z_{t-1} \exp(\eta_t)$[12].

3. W części o równowadze twierdzi się, że

> [w] przypadku symetrycznej równowagi wszystkie firmy ustalą taką samą cenę P_t i wybiorą taki sam poziom produkcji, czasu i wysiłku Y_t, N_t, U_t. Osiągnięcie ceny równowagi wymaga (...) $Y_{it} = Y_t$, dla wszystkich $i \in [0, 1]$ oraz wszystkich t.

Co więcej, model przynosi „następującą zależność równowagową o zredukowanej postaci pomiędzy produkcją i zatrudnieniem: $Y_t = AZ_t N_t^{\varphi}$".

Pośród wniosków, które można wyciągnąć na podstawie modelu – a każdy z nich rozważymy z osobna – są: (1) liczba firm i liczba gospodarstw domowych jest identyczna i równa nieskończoności; (2) wielkość każdego z wkładów użytych przez każdą firmę jest identyczna z wielkością każdego wkładu dostarczonego przez każde gospodarstwo domowe; oraz (3) istnieje nieskończona ilość *zróżnicowanych* dóbr, a każde z nich jest *identyczne* z każdym innym.

Po pierwsze, continuum firm musi z konieczności oznaczać, że istnieje ich nieskończona liczba[13]. Załóżmy *arguendo*, że (nieskończona) liczba firm jest dana przez n. Wtedy, jeśli każda firma wykorzystuje ten sam czas (N_t) i ten sam poziom wysiłku (U_t) co każda inna firma, to całkowitą ilością wykorzystanego czasu jest nN_t, a całkowitym poziomem wysiłku nU_t. Jednakże, ponieważ N_t i U_t są także czasem i poziomem wysiłku przeciętnego gospodarstwa domowego, to jeśli nie istnieje dokładnie n gospodarstw domowych wypracowujących nN_t czasu i nU_t całkowitego poziomu wysiłku, to albo firmy wykorzystują więcej czasu niż gospodarstwa domowe go w rzeczywistości wypracowują, albo zużywają go mniej. To samo można powiedzieć o poziomie wysiłku. Tylko wtedy, gdy liczba gospodarstw domowych jest równa n, ilość wykorzystanego czasu i wysiłku jest dokładnie równa ilości wypracowanego czasu i wysiłku. Z konieczności musi to oczywiście oznaczać, że istnieje nieskończona liczba, n, gospodarstw domowych dokładnie równa nieskończonej liczbie, n, firm.

Po drugie, ponieważ istniałaby jedna (identyczna, gdyby nie charakter produkcji) firma na (identyczne) gospodarstwo domowe, każda firma wykorzystywałaby czas i wysiłek wypracowany przez jedno z gospodarstw domowych, chociaż niewykluczone, że czas i poziom wysiłku wykorzystany przez określoną firmę nie pochodziłby cały z tego samego gospodarstwa domowego.

Po trzecie, ponieważ $Y_t = AZ_t N_t^{\varphi}$ [14] oraz A i Z_t są wielkościami bezwymiarowymi[15], to Y_t

---

[11] Indeks czasu t został oczywiście nieumyślnie pominięty w zmiennej konsumpcji dla funkcji użyteczności przeciętnego gospodarstwa domowego.

[12] Ponieważ efektywna praca, L_{it}, jest argumentem funkcji produkcji Y_{it}, oraz ponieważ efektywna praca jest funkcją poziomu wysiłku, U_{it}, to może w tym modelu zaistnieć Leibensteinowska nieefektywność X. O tym, dlaczego jest to ważne, patrz przypis 5.

[13] „Zbiór tworzy continuum, jeśli jest nieskończony i ciągły, jak np. zbiór liczb rzeczywistych lub zbiór punktów w przedziale liniowym" [Glenn i Littler, 1984, s. 37].

[14] Można by twierdzić, że ponieważ Y_t jest produkcją pojedynczej firmy, to $Y_t = AZ_t N_t^{\varphi}$ nie jest przykładem makroekonomicznej funkcji produkcji. Jednak, ponieważ istnieje n identycznych firm (produkujących zróżnicowane dobra), to agregatową funkcją produkcji jest $nY_t = nAZ_t N_t$. Funkcje mikro- i makroekonomiczne są identyczne względem czynnika liniowego n. To, że dobra produkowane przez te firmy są zróżnicowane nie przeszkadza nam w

musi mieć te same wymiary co N_t. Wymiarem N_t są godziny (h), a φ jest dodatnią, bezwymiarową stałą[16]. Wymiarem Y_t jest zatem godzina$^{\varphi}$. W każdym przypadku gdy $\varphi \neq 1$, wymiar Y_t, $(h)^{\varphi \neq 1}$ nie posiada uzasadnienia; np. $(h)^{0.5}$, $(h)^{1.5}$, $(h)^2$ są wymiarami nie mającymi uzasadnienia[17]. Jeśli jednak $\varphi = 1$, to $Y_t = AZ_tN_t$, a wymiar Y_t jest taki sam jak N_t (godzina). Jednakże w tym przypadku, ponieważ $Y_t = AZ_tN_t$, to godziny wyjściowe są mniejsze, równe bądź większe niż godziny wejściowe, gdy odpowiednio AZ_t jest mniejsze, równe bądź większe niż 1. Ale jeśli produkcja jest mierzona w godzinach, to godziny wyjściowe nie mogą być większe lub mniejsze niż godziny wejściowe; godziny wyjściowe muszą być równe godzinom wejściowym, tj. $AZ_t \equiv 1$ i $Y_t \equiv N_t$. Każda firma korzysta zatem na wejściu z dokładnie N_t godzin, by wyprodukować dokładnie N_t godzin na wyjściu, tj. nie istnieje produkcja netto – żadna z nieskończonej liczby rzekomo maksymalizujących zysk firm nie produkuje więcej godzin na wyjściu niż wykorzystuje na wejściu.

Co więcej, ponieważ $Y_{it} = Y_t \ \forall \ i$, to wymiarem produkcji każdej firmy są godziny. Stąd każde z *n* zróżnicowanych dóbr jest produkowane przez *n* firm składających się z homogenicznych godzin.

Oczywiście, tego modelu nie można obronić.

Dyskusja

Problemy spowodowane brakiem powodzenia w konsekwentnym i prawidłowym używaniu wymiarów w funkcjach produkcji – wymiary te albo nie mają uzasadnienia, albo sensu, albo są niestałe – nie są drugorzędne i nie ograniczają się jedynie do funkcji produkcji. Mają raczej decydujące znaczenie i są wszechobecne – dotyczą właściwie wszystkich matematycznych i ekonometrycznych modeli wyjaśniających aktywność ekonomiczną. Tak właśnie, niestety, uprawia się współczesną ekonomię [Leoni i Frola, 1977; Mises, 1977].

W artykułach zamieszczanych w czasopismach ekonomii głównego nurtu dostrzec można mniej lub bardziej standardowy wzorzec. Po pierwsze, zostają przedstawione zwięźle najważniejsze punkty teorii. Po drugie, zostaje opracowany i rozwiązany mniej lub bardziej skomplikowany matematyczny model tej teorii. Po trzecie, na jego podstawie konstruowany jest model ekonometryczny, który estymuje wartości parametrów i dostarcza istotnych statystyk. Po czwarte, wyjaśnia się dane empiryczne i dyskutuje nad nimi. Po piąte, są wyciągane wnioski. Czasami do dodatku przenosi się operacje matematyczne, jeśli uznano je za zbyt zawiłe, by mogły być umieszczone w głównej części tekstu.

Metodologia ta wymaga tworzenia hipotez i retrospektywnych prognoz, opartych na teorii i

agregacji ich w tym modelu, gdyż, jak pokazano w tekście, zróżnicowane dobra wcale nie są zróżnicowane; są raczej identyczne. (Gdybyśmy użyli wymiarów, to *n* i Y_t posiadałyby wymiary, tj. odpowiednio firmy oraz wihajstry na firmę w przedziale czasu *T*. W tej sytuacji, nY_t oraz Y_t miałyby inne wymiary: odpowiednio sztuki w przedziale czasu *T* i sztuki na firmę w przedziale czasu *T*. Jednakże, ponieważ produkcja każdej firmy jest identyczna z produkcją każdej innej firmy, to możemy wciąż prawomocnie agregować ich produkcje przez pomnożenie Y_t przez *n*).

[15] Mamy dane, że: $A \equiv [\lambda_n(1\text{-}\theta)/\lambda_u\theta]^{\alpha(1-\theta)/(1+\sigma)}$; $\theta \in (0, 1)$, a zatem jest bezwymiarowy; a λ_n, λ_u, σ_n i σ_u są dodatnimi stałymi. Wiemy, że λ_n, λ_u, σ_n i σ_u są bezwymiarowe z kontekstu w jakim się po raz pierwszy pojawiają: $H(N_t, U_t) = [\lambda_n N_t^{1+\sigma n} /(1+\sigma_n)] + [\lambda_u U_t^{1+\sigma u} /(1+\sigma_u)]$. Wiemy także, że α jest dodatnią, bezwymiarową stałą z kontekstu, w jakim po raz pierwszy się pojawia: $Y_{it} = Z_{it}L_{it}^{\alpha}$. *A* musi być zatem dodatnią, bezwymiarową stałą. Wiemy też, że Z_t musi być dodatnią, bezwymiarową zmienną, ponieważ „*Z* jest indeksem zagregowanej technologii i przyjmuje się, że jego stopa wzrostu będzie przebiegać zgodnie z niezależnie i jednakowo rozmieszczonym procesem $\{\eta_t\}$, przy $\eta_t \sim N(0, s_z^2)$. Formalnie, $Z_t = Z_{t-1} \exp(\eta_t)$".

[16] Mamy dane, że: $\varphi = \alpha\theta + \alpha(1\text{-}\theta)(1+\sigma_n)/(1+\sigma_u)$. Wiemy, że $\theta \in (0, 1)$, σ_n, σ_u i α są dodatnimi, bezwymiarowymi stałymi. (Patrz przypis 3.) Stąd φ musi być dodatnią, bezwymiarową stałą.

[17] Jest prawdą, że czas (t) do kwadratu ma uzasadnienie w świecie nauk przyrodniczych, takie że w wymiarach przyspieszenia jest odległość/t^2. Ale w żaden sposób nie pomaga to znaleźć uzasadnienia dla t^2 w świecie nauk społecznych.

dotyczących wielkości istotnych parametrów w modelu. Następnie używając technik wnioskowania statystycznego porównuje się estymowane znaki i wartości parametrów z oczekiwanymi znakami i wartościami by określić czy hipoteza może być sfalsyfikowana, a retrospektywne prognozy odrzucone jako niewystarczająco dokładne.

Brak konsekwencji i poprawności w używaniu wymiarów niestety sprawia, że jest właściwie niemożliwe uchronienie się od niedorzecznych i będących nie do utrzymania założeń, które niepostrzeżenie wkradają się do matematycznych i ekonometrycznych modeli. Takie założenia czynią oczywiście zbudowane na nich modele właściwie bezwartościowymi. Jak widzieliśmy prowadzą do tak absurdalnych wniosków, jak ten mówiący, że zróżnicowane dobra są identyczne. (Przypomnijmy uwagę Coase'a [1988, s. 185]: „w czasach mojej młodości mówiło się, że co jest za głupie, by o tym mówić, to można zaśpiewać. We współczesnej ekonomii można to wyrazić za pomocą [bezwymiarowej] matematyki”). Takie wyniki, będące wyraźnie nie do utrzymania, przechodzą niekwestionowane, ponieważ bezwymiarowa matematyka raczej zaciemnia niż rozjaśnia analizę, a także dlatego, że niektórzy matematyki się obawiają.

Problemów przedstawionych w tych przykładach z pewnością można by uniknąć, gdyby konsekwentnie i prawidłowo używano wymiarów. To, czy autor mógłby potem opracować model łatwy do obróbki jest inną kwestią. Tym niemniej jest jasne, przynajmniej dla autora niniejszego artykułu, że gdy wybór jest pomiędzy pozbawionym wymiarów, łatwym do obróbki modelem matematycznym a wyjaśnieniem nie odwołującym się do modelu, to ta druga możliwość jest zdecydowanie lepsza.

Nie można jednak uważać, że autor, którego tekst dostarczył omawianego wyżej przykładu, nie miał cennych spostrzeżeń dla zrozumienia aktywności ekonomicznej, bo równie dobrze mógł je mieć. Tym nie mniej jednak muszą one zostać określone niezależnie od modelu matematycznego, gdyż ten nie stanowi żadnego istotnego wsparcia dla argumentów autora.

Wnioski

Ekonomiści próbują odnieść sukces w zrozumieniu, objaśnianiu i prognozowaniu zdarzeń w świecie społecznym, podobny do tego, jaki fizycy i inżynierowie osiągnęli w świecie przyrody. W tym celu naśladują ich metody, tj. używają analiz matematycznych i statystycznych do modelowania, zrozumienia i objaśnienia istotnych zjawisk. Naśladując fizyków i inżynierów ekonomiści zawiedli jednak w jednym zasadniczym aspekcie ich pracy: w konsekwentnym i prawidłowym użyciu wymiarów. Jest to nadużycie metod matematycznych/naukowych; unieważnia ono wyniki matematycznych i statycznych metod, których użyto rozwijając teorię ekonomii i stosując ją w praktyce.

Problem ten nie jest kwestią przeszłości, nie ogranicza się również do spraw mniejszej wagi czy też marginalnych. Istnieje nadal i można go znaleźć w czołowych czasopismach (i podręcznikach) głównego nurtu. Przyszłe pokolenia ekonomistów są kształcone w błędnej tradycji, ponieważ ich młode umysły są kształtowane przez właśnie takie publikacje. I dopóki się to nie zmieni, a ekonomiści nie zaczną używać wymiarów w sposób konsekwentny i prawidłowy (o ile to w ogóle możliwe), to ekonomia matematyczna i jej empiryczne *alter ego* – ekonometria - nadal pozostaną akademickimi gierkami i „rygorystycznymi” pseudonaukami. Z powodu wpływu, jaki ekonomiści wywierają na politykę rządu, takie pseudonaukowe gierki nie odbywają się jednak bez kosztów, które ponosi się w realnym świecie.

Nie twierdzę, iż ekonomiści neoklasyczni nie czynią żadnych postępów w rozumieniu ekonomii; uważam raczej, że matematyka nie jest ani koniecznym, ani wystarczającym środkiem, aby takie postępy osiągnąć. Odrębne zagadnienie stanowi kwestia, co jest lub co mogłoby być odpowiednim sposobem na osiągnięcie takich postępów. Ważne jest jednak to, że matematyka prawdopodobnie nie może nim być, jeśli nie używa się jej we właściwy sposób. Między innymi oznacza to, że wymiary muszą być używane konsekwentnie i prawidłowo.

Dodatek

(....)

Jednym z wymogów właściwego użycia matematyki jest prawidłowe użycie wymiarów/jednostek[18]. Dla przykładu: w fizyce i inżynierii analizy wymiarowej używa się po to, by się upewnić w kwestii spójności relacji w równaniu. Zmienne ekonomiczne wszechobecnych w ekonomii modeli matematycznych i statystycznych [Backhouse, 2000] zawsze zawierają wymiary. Tym nie mniej jednak w ekonomii rzadko używa się wymiarów/jednostek, a analizy wymiarowej właściwie nigdy. Z tego powodu wysłałem do czołowego anglojęzycznego czasopisma ekonomicznego artykuł[19] na ten temat. Był on niebezpośrednim atakiem na użycie matematyki w teorii ekonomii; utrzymywał, że jeśli używa się w ekonomii matematyki, powinno się to robić poprawnie. Artykuł demonstrował, że analiza wymiarowa funkcji produkcji, w szczególności funkcji Cobba-Douglasa, daje wymiary, które nie mają uzasadnienia lub sensu ekonomicznego oraz są niestałe. Następnie dawał dwa przykłady: mikro- i makroekonomiczny; oba krytyczne względem modeli prezentowanych w artykułach z poprzednich numerów tego czasopisma. Oba przykłady dotyczyły konsekwencji, jakie niesie za sobą zaniechanie użycia wymiarów i analizy wymiarowej w ekonomii. Przeprowadzona analiza wymiarowa doprowadziła do wniosku, że oba modele są nie do obrony i nonsensowne[20].

Artykuł został odrzucony. List odmowny zawierał opinie trzech recenzentów. Poniżej przedstawię fragmenty tych opinii wraz z krótkim omówieniem błędów w nich zawartych.

> Z opinii recenzenta #1:
>
> Przedstawiono „defekt” w analizie ekonomicznej, polegający na tym, że w równaniach nie są właściwie wyliczone jednostki, a zatem dwie strony równań powszechnie używanych w ekonomii są niespójne. Twierdzi się, że defektu tego nie ma w naukach przyrodniczych (takich jak fizyka) oraz, że defekt ten deprecjonuje formalne modelowanie ekonomiczne. „Defekt” został dokładnie zilustrowany przykładem wziętym z artykułu, który omówię szczegółowo później. Następnie przedstawiając przykłady kilku prostych układów fizycznych zaczerpnięte z przypadkowej książki, którą wziąłem z mojej półki, pokażę, że ten „defekt” jest obecny również w fizyce. Później będę argumentował, że w rzeczywistości nie jest to żaden defekt.
>
> Z opinii recenzenta #2:
>
> Analiza wymiarowa ma zastosowanie tylko w przypadku *praw*.
>
> Przypadkiem, w którym ta analiza [wymiarowa] miałaby sens, jest jej zastosowanie w równaniu wymiany Fishera: MV = PT. Jest to jeden z niewielu w ekonomii przykładów, który jest najbardziej zbliżony do prawa. Jednym z rezultatów analizy wymiarowej jest to, że w tym równaniu występuje coś dziwnego. Lewa strona zawiera wymiar czasu, a prawa nie. Nie jest to jednak nic nowego i można to znaleźć w dowolnym podręczniku.

---

[18] Nie jest to rzeczą trudną, opublikowano już prace na temat analizy wymiarowej. Zobacz na przykład dodatek do Reddick i Miller [1955]. [patrz również: Wacław Kasprzak, Bertold Lysik, *Analiza wymiarowa. Algorytmiczne procedury obsługi eksperymentu*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1988 – przyp. tłum.]

[19] Artykuł tamten, z niewielkimi zmianami redakcyjnymi, które nie mają wpływu na treść, stanowi główną część obecnego tekstu; wyjątkiem jest jeden przykład, usunięty zgodnie z sugestią recenzenta wyłącznie dlatego, że zawierał funkcję produkcji o stałych współczynnikach Leontiefa, o której recenzent napisał, że „jest niewielkie ogólne zainteresowanie nią, a żadne wśród czytelników *QJAE*”.

[20] Co nie znaczy, że autorzy tych artykułów nie mogli mieć czegoś wartościowego do powiedzenia. Jest to odrębna kwestia.

> Z opinii recenzenta #3:
>
> Nie jest kwestią sporną to, czy brak spójności wymiarów na wskroś przenika ekonomię matematyczną. Artykuł ten nie wyjaśnia jednak dlaczego brak spójności wymiarów stanowi problem. Brak spójności wymiarów nie jest sam w sobie wielkim problemem (...).

Porównajmy stwierdzenia recenzentów z następującymi fragmentami zaczerpniętymi z dwóch czołowych (podstawowych) podręczników fizyki.

> Analiza wymiarowa jest stosowana w celu sprawdzenia spójności wymiarów w relacjach matematycznych (...) *[j]eżeli wymiary nie są takie same, to relacja jest błędna* [Cutnell i Johnson, 2001, s. 6; kursywa Barnetta].
>
> Równanie musi *zawsze* mieć spójne wymiary; to oznacza, że dwa wyrażenia mogą zostać do siebie dodane bądź przyrównane tylko wtedy, gdy mają takie same jednostki. (...) Gdy problem wymaga obliczeń z użyciem liczb i jednostek, to liczby powinny *zawsze* być zapisywane z odpowiednimi jednostkami, a jednostki powinny być wyprowadzone przez wyliczenie ich tak jak w przykładzie powyżej. To pozwala bez problemu sprawdzić obliczenia. *Jeśli na którymś etapie obliczeń odkryjecie, że równanie czy wyrażenie posiada niespójne jednostki, to wiecie, że popełniliście gdzieś błąd* [Sears, Zemansky i Young, 1987, s. 7; kursywa Barnetta].

Czy można uwierzyć, że ktoś nawet z najbardziej elementarną wiedzą matematyczną mógł twierdzić to, co napisali ci recenzenci? Jest to niewiarygodne. Czy recenzenci ci cierpią na dyskalkulię? Jak inaczej wytłumaczyć powyższe? Ale to nie koniec.

> Znowu z opinii recenzenta #1:
>
> Szczegóły nie są bardzo istotne, ale rozwiązanie problemu [ruchu harmonicznego prostego] stanowi [Spiegel, 1967, s. 186], że $x = ⅓ \cos 8t$, gdzie x jest długością łuku (wychylenia środka ciężkości z położenia równowagi) mierzoną w metrach, a t jest czasem mierzonym w sekundach. Więc dokładnie jakiego rodzaju stałej przeliczeniowej [sic] chce pan [Barnett] użyć, żeby zamienić czas na [sic] długość? Z pewnością nie jest to stała, gdyż musi przejść przez wyrażenie cosinusowe [sic] (podobnie jednostki pracy i kapitału muszą przejść przez wykładniki potęgi w przykładzie [$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$] powyżej).

Ale szczegóły są oczywiście istotne, ponieważ dla tego recenzenta diabeł tkwi w szczegółach. Wzór na wychylenie w ruchu harmonicznym prostym, $x = A \bullet \cos \omega t$, można znaleźć w Cutnell i Johnson [2001, s. 278]. W tym wzorze, x jest wychyleniem mierzonym w jednostkach długości; A jest amplitudą drgań w ruchu harmonicznym prostym, również mierzoną w jednostkach długości; ω jest stałą prędkością kątową mierzoną w radianach/sekundę [rad/s]; a t jest czasem mierzonym w sekundach [s]. Wskutek tego ωt ma wymiar [rad].

Wracając do wzoru $x = A \bullet \cos \omega t$, po wstawieniu odpowiednich jednostek i użyciu metrów [m] jako jednostki długości, wygląda to następująco: x[m] = A[m] • cos ω[rad/s] • t[s]. Po skróceniu [s] po prawej stronie mamy: x[m] = A[m] • cos ω[rad]t.

Radian jest jednakże bezwymiarową miarą kąta płaskiego[21] (1 rad = 180º/π ≈ 57.30º)., Jedyną jednostką, która „musi przejść przez wyrażenie cosinusowe” jest zatem miara kąta (płaskiego). Oczywiście przekształcenie miary kąta płaskiego z radianów lub stopni na samą, tj. bezwymiarową, liczbę jest dokładnie tym, co czyni operator trygonometryczny, w tym cosinus. Wskutek tego równanie $x = A \bullet \cos \omega t$ posiada po obu stronach tą samą jednostkę, metry.

Porównajmy szczególne równanie recenzenta, $x = ⅓ \cos 8t$, z ogólną formą, $x = A \bullet \cos \omega t$. Relacje pomiędzy wyrażeniami w tych równaniach to: $x = x$; $A = ⅓$; wartość $\omega = 8$; i $t = t$. Po użyciu tych relacji przy ponownym przedstawieniu równania $x = ⅓ \cos 8t$ z odpowiednimi

---

[21] http://physics.nist.gov/cuu/Units/units.html.

jednostkami mamy: x[m] = ⅓[m] cos (8[rad/s] • t[s]). Skrócenie [s] po prawej stronie daje: x[m] = ⅓[m] cos 8[rad] • t, gdzie wyrażenie cos 8[rad] • t jest bezwymiarowe. Wtedy, jak w każdym przypadku, jednostki po prawej stronie są takie same jak jednostki po lewej stronie; w tym przypadku metry. Stwierdzenie recenzenta jest oczywiście błędne.

Przykład ten przywodzi na myśl termin *genialny idiota*. Bez wątpienia recenzent wie dużo o czystej matematyce; ale czy ma jakiekolwiek pojęcie o matematyce stosowanej lub fizyce? Odpowiedzią na dowód, który przedstawia w powyższym fragmencie, jest, przynajmniej jeśli chodzi o ruch harmoniczny, rozbrzmiewające głośno „NIE!"

I jeszcze raz recenzent #1:

> Jeśli ktoś chce przykładu z fizyki, który nie zawiera czasu, niech zobaczy s. 97 [Spiegel 1967], gdzie jest przypadek dotyczący przewodności cieplnej w rurach. Rozwiązaniem jest $U = 699 - 216 \ln(r)$, gdzie r to odległość w centymetrach, a U to temperatura w stopniach. Jakiego współczynnika konwersji chce pan teraz użyć, żeby przekształcić odległość na stopnie? Wnioskuję, że fizyka zawiera takie same „defekty," gdy badamy pewne układy.

Jeszcze raz recenzent pokazuje swoją ignorancję w dziedzinie matematyki stosowanej i fizyki, a przynajmniej w zakresie termodynamiki. W rzeczywistości wymiarami po *obu* stronach równania $U = 699 - 216 \ln(r)$ są stopnie Celsjusza. Ponieważ dowód jest dosyć długi, to został zamieszczony jako załącznik.

Poniżej, z moimi kursywami, znajduje się główna część listu współredaktora dotycząca odrzucenia, któremu towarzyszyły cytowane powyżej opinie recenzentów.

> Załączam trzy *przemyślane* recenzje pańskiego rękopisu. Recenzenci, chociaż życzliwi, jednoznacznie zalecili mi odrzucenie go. Ponieważ zgadzam się z ich ocenami, muszę odrzucić pański rękopis. Recenzenci w niektórych miejscach przybrali dosyć ostry ton. Mam nadzieję, że widzi pan, iż wzięli recenzowanie na poważnie i napisali *przemyślane* opinie. Starali się zrozumieć pański sposób myślenia, a miejscami ostre słowa były konsekwencją frustracji, którą również ja odczuwałem podczas przeglądania pańskiego rękopisu.
>
> Nasze [czasopismo] otrzymuje około 1000 rękopisów roczne i publikuje mniej niż dziesięć procent z nich. Wskutek tego jestem zmuszony odrzucić wiele całkiem dobrych artykułów. Dziękuję za zgłoszenie pańskiego artykułu do naszego [pisma]. Przykro mi, że moja odpowiedź nie mogła być bardziej satysfakcjonująca.

Przesłałem *12-stronicową* odpowiedź na opinie recenzentów, w której zwróciłem współredaktorowi uwagę na liczne błędy, określiłem na czym polega ich natura, przedstawiając szczegółowy dowód dla każdego z nich.

Współredaktor odpisał na moją odpowiedź listem datowanym na 1 lutego 2001, którego główną część prezentuję poniżej.

> Odpisuję na pański list z 12 stycznia 2001.
>
> Najwidoczniej nie był pan w stanie dojrzeć istoty opinii kryjącej się za ich tonem. Niestety, przeczytanie *pańskiej diatryby o błędach recenzentów nie przekonało mnie do błędów po ich stronie*. Przypadek funkcji produkcji Cobba-Douglasa jest dość jasny. Pańskie przekonanie o tym, że jednostki związane z CD są nienaturalne, nie sprawia, że tak jest w istocie. *Co więcej, recenzenci mają rację w sprawie jednostek używanych w celu usprawnienia fizyki* – odległość do kwadratu czy log(temperatura) nie mają więcej sensu niż pierwiastek kwadratowy z roboczogodzin. Jednostki są tym, czym są i z pewnością nie może pan naprawdę myśleć, że funkcja produkcji Cobba-Douglasa jest niespójna logicznie. Podobnie jak prawa przyrody, funkcja produkcji jest tym, czym jest.
>
> Jak się pan domyślił, nie mam zamiaru ponownie otwierać kartoteki. *Już na samym*

> *początku nie zdołał pan przekonać trzech recenzentów i jednego redaktora do zalet swojego podejścia*. Podejrzewam, że będzie pan potrzebował o wiele więcej wysiłku, żeby sprzedać tę pracę do jakiegokolwiek czasopisma. Powinien pan spróbować w *Economics & Philosophy*.

Redaktor jasno stwierdził, że „zgadza się z ocenami [recenzentów],” których opinie były „przemyślane,” a moja „diatryba” nie „przekonała [redaktora] o błędach po stronie [recenzentów],” oraz że „[j]uż na samym początku nie zdołał pan przekonać trzech recenzentów i jednego redaktora do zalet swojego podejścia”. Moja odpowiedź zawierała materiał przedstawiony powyżej i w załączniku, co więcej, była bardziej szczegółowa. Jak zatem redaktor mógł dojść do wniosków, które sformułował? Trzech recenzentów i redaktor czołowego czasopisma cierpią na dyskalkulię? Nawet w najśmielszych snach nie podejrzewałem, że redaktor i recenzenci prestiżowego anglojęzycznego pisma ekonomicznego mogą być takimi ignorantami w dziedzinie podstaw matematyki, a tym bardziej, że załączą coś takiego do artykułu wiedząc, że nie będą mogli się tego wyprzeć i zostanie to zachowane dla przyszłych pokoleń.

(...)

Załącznik

Recenzent #1 wziął równanie $U = 699 - 216 \ln(r)$ jako przykład ze Spiegel [1967, s. 97-98]. (Proszę zauważyć, że używam innego wydania [Spiegel, 1981, s. 103-104]). Przykład ma formę problemu składającego się z trzech części. „Rozwiązanie (...) $U = 699 - 216 \ln(r)$”, które recenzent wziął z książki, jest rozwiązaniem tylko jednej części. Odtworzyłem istotny fragment przykładu poniżej. (Kursywa za oryginałem.) Następnie przedstawię przykład w rozszerzonej formie w taki sposób, aby wyjaśnić błąd recenzenta.

> Ilość ciepła, która w jednostce czasu przepływa przez powierzchnię A jest dana przez:
>
> $$q = -KAdU/dn \tag{3}$$
>
> Użyta powyżej stała proporcjonalności K zależy od używanego materiału i jest nazywana *przewodnością cieplną*. Ilość ciepła jest wyrażona *kaloriach* w układzie cgs (centymetr-gram-sekunda) i *brytyjskich jednostkach ciepła, Btu* w układzie fps (stopa-funt-sekunda). [Z powodu zamieszania, jakie powstało wokół użycia „funta” jako jednostki masy i jako jednostki siły, to we współczesnej wersji układu fps, układzie BE (Inżynierii Brytyjskiej – *British Engineering*), jednostką masy jest slug, a nie funt.] Rozważmy teraz ilustrację używając powyższych zasad.
>
> Długa stalowa rura o przewodności cieplnej $K = 0.15$ jednostek cgs, ma promień wewnętrzny 10 cm i promień zewnętrzny 20 cm. Powierzchnia wewnętrzna ma 200º C, a powierzchnia zewnętrzna 50º C.
> (a) Przedstaw temperaturę jako funkcję długości r na wspólnej osi koncentrycznych cylindrów.
> (b) Oblicz temparaturę, gdy $r = 15$ cm.
> (c) Jaką ilość ciepła w ciągu minuty straci kawałek rury o długości 20 cm?
>
> *Formalizacja matematyczna* [Spiegel, 1981, s. 103–104]. Jest oczywiste, że powierzchnie izotermiczne to koncentryczne cylindry. Pole tej powierzchni o promieniu r i długości l to $2\pi rl$. Odległością dn jest w tym przypadku dr. Zatem, równanie (3) można zapisać:
>
> $$q = -K(2\pi rl)\, dU/dr \tag{4}$$
>
> Ponieważ $K = 0.15$, $l = 20$ m = 2000 cm, to mamy
>
> $$q = -600\pi r\, dU/dr \tag{5}$$
>
> W tym równaniu q jest oczywiście stałą. Warunki to

$$U = 200^\circ \text{ C, gdy } r = 10,\ U = 50^\circ \text{ C, gdy } r = 20 \qquad (6)$$

Rozwiązanie. Rozdzielenie zmiennych z (5) i scałkowanie daje

$$-600\pi U = q \ln(r) + c \qquad (7)$$

Po zastosowaniu się do warunków (6), mamy $-600\pi(200) = q \ln 10 + c$, oraz $-600\pi(50) = q \ln 20 + c$, z czego otrzymujemy $q = 408{,}000$, $c = -1{,}317{,}000$. Zatem, z (7) mamy

$$U = 699 - 216 \ln(r) \qquad (8)$$

Rozszerzone rozwiązanie. Poniżej został przedstawiony materiał z jednostkami w nawiasach wyraźnie przypisanymi do symboli algebraicznych zmiennych. Wymiarami przewodności cieplnej są jednostki: energia/(czas•odległość•temperatura termodynamiczna). Przewodność cieplna rury *K*, w jednostkach (cgs), to zatem cal/(s•cm•°C). Jednostkami innych zmiennych są odpowiednio: cm dla *l*, *dr* i *r*; °C dla *dU* i *U*; oraz cal/s dla *q*.

Po przepisaniu równania (4) mamy:

$$q \text{ [cal/s]} = -K \text{ [cal/(s•cm•°C)]} \bullet (2\pi r \text{ [cm] } l \text{ [cm]}) \bullet dU \text{ [°C]} / dr \text{ [cm]} \qquad (4')$$

Po podstawieniu wartości dla *K* i *l* mamy:

$$q \text{ [cal/s]} = -0.15 \text{ [cal/(s•cm•°C)]} \bullet 2\pi r \text{ [cm] } 2000 \text{ [cm]} \bullet dU \text{ [°C]} / dr \text{ [cm]} \qquad (5')$$

Centymetry i stopnie Celsjusza w mianowniku wymiaru *K* skracają się odpowiednio z centymetrami w liczniku wymiaru *l* i stopniami Celsjusza w liczniku wymiaru *dU*. Zauważmy zwłaszcza, że ponieważ jednostki *r* i *dr* są identyczne oraz ponieważ *r* jest w liczniku, a *dr* w mianowniku, to jednostki zmiennych *r* i *dr* skracają się, a wszystko co pozostało z tych zmiennych to ich wielkości; symbole algebraiczne nie mają już przypisanych jednostek. Skrócenie jednostek daje zatem:

$$q \text{ [cal/s]} = -600 \text{ [cal/(s)]} \bullet \pi r \bullet dU/dr \qquad (5'')$$

W tym miejscu jedynymi jednostkami, które się nie skróciły są cal/s po obu stronach równania.

Przekształcenie (5″) w formę całkowalną daje:

$$-600 \text{ [cal/(s)] } \pi dU = q \text{ [cal/s] } dr/r \qquad (5''')$$

Całka z *dr*/*r* daje ln *r*, przy czym symbol algebraiczny zmiennej *r* w wyrażeniu ln *r* traci jednostki i pozostaje tylko jego wielkość, a zatem nie ma jednostek, które mogłyby zostać przekształcone przez operator ln[22]. Podobnie jest z całką z *dU*, która daje *U*, ale symbol algebraiczny traci swoje jednostki i pozostaje tylko jego wielkość. Rozwiązaniem (5‴) jest zatem:

$$-600 \text{ [cal/(s)] } \pi U = q \text{ [cal/s] } \ln(r) + c \qquad (7')$$

Biorąc pod uwagę warunki (6), tj. $U = 200^\circ$ C, gdy $r = 10$, $U = 50^\circ$ C, gdy $r = 20$, oraz pamiętając, że *r* odnosi się tylko do wielkości w tym miejscu; cm pojawia się w nawiasach tylko jako przypomnienie wymiarów, jakie *r* miało przed skróceniem w równaniu q [cal/s] = $-K$ [cal/(s•cm•°C)] • ($2\pi r$ [cm] l [cm]) • dU [°C] / dr [cm]. Po spełnieniu tych warunków w (7′), rozwiązaniami dla *q* i *c* są zatem: $q = 408'000$ cal/s oraz $c = -1'317'000$ cal/s. Uwaga: jednostkami *c* są cal/s, gdyż w innym przypadku analiza wymiarowa wykazałaby niespójne jednostki, co

---

[22] Tutaj autor artykułu nie do końca ma rację. Nie tyle wymiar *r* pod logarytmem „traci jednostki", ile po scałkowaniu równania (5) odpowiednie przekształcenie otrzymanego rozwiązania daje pod logarytmem wartość bezwymiarową. Poprawniej rozwiązanie tego równania należałoby napisać w formie:

$600\pi U = q(\ln r - c^*) = q(\ln r - \ln r_0)$, czyli

$$600\pi U = q\ln(\frac{r}{r_0})$$

gdzie r_0 należy traktować jako swego rodzaju promień odniesienia powiązany ze stałą całkowania c^* wyrażeniem $c^* = \ln(r_0)$ [przypis: Witold Kwaśnicki].

oczywiście musiałoby oznaczać błąd, a mianowicie nieprawidłową relację.

Żeby rozwiązać U zawierające właściwe jednostki, przepiszemy (7′) (podstawiając q = 408'000 cal/s za q oraz c = –1'317'000 cal/s za c) jako:

$$-600\ [\mathrm{cal}/(\mathrm{s}\bullet{}^{\circ}\mathrm{C})]\pi\ U\ [{}^{\circ}\mathrm{C}] = 408'000\ [\mathrm{cal/s}]\ \ln(r) - 1'317'000\ [\mathrm{cal/s}] \qquad (8')$$

Po wydzieleniu U, wyrażenie ma postać:

$$U\ [{}^{\circ}\mathrm{C}] = (408'000\ [\mathrm{cal/s}]\ \ln(r) - 1'317'000\ [\mathrm{cal/s}])/(-600\ [\mathrm{cal}/(\mathrm{s}\bullet{}^{\circ}\mathrm{C})] \bullet \pi) \qquad (8'')$$

Ponieważ cal/s pojawiają się w każdym wyrażeniu w liczniku i mianowniku po prawej stronie (8″), to można je skrócić, pozostawiając:

$$U\ [{}^{\circ}\mathrm{C}] = (408'000\ [{}^{\circ}\mathrm{C}]\ \ln(r) - 1'317'000\ [{}^{\circ}\mathrm{C}])/(-600\pi) \qquad (8''')$$

czyli

$$U\ [{}^{\circ}\mathrm{C}] = 699\ [{}^{\circ}\mathrm{C}] - 216\ [{}^{\circ}\mathrm{C}]\ \ln(r) \qquad (8'''')$$

Ponieważ, jak pokazano wcześniej, ln(r) jest bezwymiarowe, to oczywiste jest, że wymiarami po obu stronach równania (8″″) są stopnie Celsjusza; a zatem wymiary są identyczne, co jest warunkiem koniecznym.

Jednakże równanie (8″″) jest tym samym rozwiązaniem (tylko, że z właściwymi jednostkami), które recenzent cytował w swojej opinii, aby dowieść swojego zdania.

Niezaprzeczalne stwierdzenia recenzenta #1, że jednostki po różnych stronach równania $U = 699 - 216 \ln(r)$ nie są takie same, że jednostkami po lewej stronie są stopnie Celsjusza, a jednostkami po prawej stronie są centymetry, jak również jego wniosek, że „fizyka zawiera takie same „defekty" [tj. błędy przy prawidłowym wyliczaniu jednostek, a tym samym niespójności pomiędzy dwiema stronami równań], gdy badamy pewne układy," są zatem błędne. *Quod erat demonstrandum*.

Literatura

Backhouse, Roger E. [2000], *Austrian Economics and the Mainstream: View from the Boundary*, „Quarterly Journal of Austrian Economics" 3 (2).

Coase, Ronald H. [1988], *The Firm, The Market, and The Law*, Chicago: University of Chicago Press.

Cutnell, John D., Johnson, Ken W. [2001], *Physics*, wyd. 5, New York: John Wiley and Sons.

Glenn, John A., Littler, Graham H., red. [1984], *A Dictionary of Mathematics*, Towata, N.J.: Barnes and Noble.

Harcourt, G.C. [1972], *Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital*, Cambridge, Mass.: Cambridge University Press.

Leoni, Bruno, Frola, Eugenio [1977], *On Mathematical Thinking in Economics*, „Journal of Libertarian Studies" 1 (2).

Mises, Ludwig von [1977], *Comments about the Mathematical Treatment of Economic Problems*, „Journal of Libertarian Studies" 1 (2) [*Uwagi o matematycznym podejściu do problemów ekonomicznych*, tłum. J. Jabłecki, http://mises.pl/site/subpage.php?id=53&content_id=112&view=full].

Reddick, Harry W., Miller, F.H. [1955], *Advanced Mathematics for Engineers*, wyd. 3, New York: John Wiley and Sons.

Sears, Francis W., Zemansky, Mark W. [1955], *University Physics*, wyd. 2, Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Sears, Francis W., Zemansky, Mark W., Young, Hugh D. [1987], *University Physics*, wyd. 7, Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Spiegel, Murray R. [1967], *Applied Differential Equations*, wyd. 2, New York: Prentice-Hall.

Spiegel, Murray R. [1981], *Applied Differential Equations*, wyd. 4, New York: Prentice-Hall.

Thomas, George B. [1968], *Calculus and Analytical Geometry*, wyd. 4, Reading, Mass.: Addison-Wesley.